

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2021 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a, b を $ab < 1$ をみたす正の実数とする. xy 平面上の点 $P(a, b)$ から, 曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) に 2 本の接線を引き, その接点を $Q\left(s, \frac{1}{s}\right), R\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とする. ただし, $s < t$ とする.

(1) s および t を a, b を用いて表せ.

(2) 点 $P(a, b)$ が曲線 $y = \frac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0, y > 0$ をみたす部分を動くとき, $\frac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ.

第 2 問

空間内に、同一平面上にない4点 O, A, B, C がある. s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ をみたす実数とする. 線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 , 線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 , 線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P , 線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする. さらに4点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする.

(1) t を s を用いて表せ.

(2) $|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2, \angle AOB = 120^\circ, \angle BOC = 90^\circ, \angle COA = 60^\circ, \angle POQ = 90^\circ$ であるとき, s の値を求めよ.

第 3 問

n を自然数とし, t を $t \geq 1$ をみたす実数とする.

(1) $x \geq t$ のとき, 不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p, q の値を求めよ.

第 4 問

整数 a, b, c に関する次の条件 $(*)$ を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx)dx = \int_b^c (x^2 + ax)dx \quad \cdots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき, c は 3 の倍数であることを示せ.
- (2) $c = 3600$ のとき, $(*)$ および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) の個数を求めよ.

第 5 問

次の問いに答えよ.

- (1) a を実数とする. x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち, $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ.
- (2) 自然数 n に対し, $x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく. t を $|t| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする. このとき, 曲線 $C: y = \sin x$ 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線が, 不等式 $x \geq \frac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は, t が $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかと等しいことであることを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)