

大阪大学 2021 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b を $ab < 1$ をみたす正の実数とする. xy 平面上の点 $P(a, b)$ から, 曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) に 2 本の接線を引き, その接点を $Q\left(s, \frac{1}{s}\right), R\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とする. ただし, $s < t$ とする.

(1) s および t を a, b を用いて表せ.

(2) 点 $P(a, b)$ が曲線 $y = \frac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0, y > 0$ をみたす部分を動くとき, $\frac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ.

▶ 解法 1 (接点方程式の 2 根を直接求める)

【方針】

接点の横座標を u として $y = 1/x$ の接線を求め, 点 P を通る条件を 2 次方程式にする. 2 根の正值性を確認して s, t を表示し, 後半は t/s を ab の単調な関数とみて積 ab を最大化する.

【解答】

(1) 曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $\left(u, \frac{1}{u}\right)$ における接線は

$$y = -\frac{x}{u^2} + \frac{2}{u}$$

である. これが $P(a, b)$ を通る条件は

$$bu^2 - 2u + a = 0$$

となる. 判別式は $4(1 - ab) > 0$, 2 根の和と積は $2/b > 0, a/b > 0$ だから, 2 根は相異なる正数である. 小さい根を s , 大きい根を t とすれば

$$s = \frac{1 - \sqrt{1 - ab}}{b}, \quad t = \frac{1 + \sqrt{1 - ab}}{b}$$

である.

(2) $r = \sqrt{1 - ab}$ とおくと $0 < r < 1$ であり,

$$\frac{t}{s} = \frac{1 + r}{1 - r}$$

を得る. 右辺は r とともに増加するので, t/s を最小にするには ab を最大にすればよい.

曲線上では

$$ab = a\left(\frac{9}{4} - 3a^2\right), \quad 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である. 右辺の導関数 $9/4 - 9a^2$ の符号から, 最大値は $a = 1/2$ でとる. このとき

$$b = \frac{3}{2}, \quad ab = \frac{3}{4}, \quad r = \frac{1}{2}$$

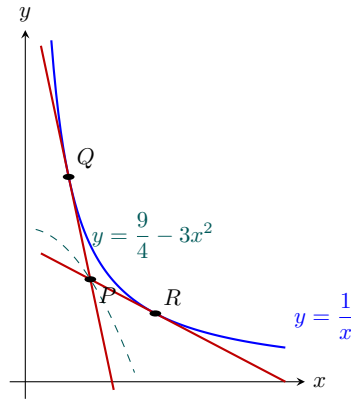
だから

$$\min \frac{t}{s} = \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3$$

である. したがって, 求める最小値は 3, そのとき

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

である.



▶ 解法 2 (根の比と対称式から最小化する)

【方針】

接線を $x + u^2y = 2u$ と書いて s, t の和と積だけを求める。 $r = t/s$ とおくと $r + 1/r$ が ab だけで表されるため、根号を直接微分せずに比の最小化を積 ab の最大化へ帰着できる。

【解答】

(1) 曲線 $y = 1/x$ 上の点 $(u, 1/u)$ における接線と、それが $P(a, b)$ を通る条件は

$$x + u^2y = 2u, \quad bu^2 - 2u + a = 0$$

である。判別式は $4(1 - ab) > 0$, 2 根の和と積は $2/b > 0, a/b > 0$ なので、2 根は相異なる正数である。小さい方を s , 大きい方を t とすれば

$$s = \frac{1 - \sqrt{1 - ab}}{b}, \quad t = \frac{1 + \sqrt{1 - ab}}{b}$$

である。

(2) $r = t/s > 1$ とおく。解と係数の関係から

$$s + t = \frac{2}{b}, \quad st = \frac{a}{b}, \quad \frac{4}{ab} = \frac{(s+t)^2}{st} = \frac{(r+1)^2}{r} = r + 2 + \frac{1}{r}$$

だから

$$r + \frac{1}{r} = \frac{4}{ab} - 2$$

を得る。 $r > 1$ では左辺は単調増加なので、 r の最小化は ab の最大化に等しい。

曲線上では

$$ab = a \left(\frac{9}{4} - 3a^2 \right), \quad 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、導関数 $9/4 - 9a^2$ の符号から、最大は $a = 1/2$ のときである。したがって

$$b = \frac{3}{2}, \quad ab = \frac{3}{4}, \quad r + \frac{1}{r} = \frac{10}{3}, \quad 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

となる。 $r > 1$ を満たす根は $r = 3$ である。よって最小値は 3, そのとき

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 20 分程度。接線条件を接点の 2 次方程式へ変換し、 $ab < 1$ から相異なる 2 接点が存在することを確認する。(1) では 2 根が正であること、(2) では曲線上の範囲 $0 < a < \sqrt{3}/2$ を落とさないことが重要である。根号表示を使う方法と根の比 $r = t/s$ の対称式を使う方法は、どちらも ab の最大値 $3/4$ に帰着する。

【第 2 問】

空間内に、同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある。 s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ をみたす実数とする。 線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 、線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 、線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P 、線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。 さらに 4 点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $|\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 2, \angle AOB = 120^\circ, \angle BOC = 90^\circ, \angle COA = 60^\circ, \angle POQ = 90^\circ$ であるとき、 s の値を求めよ。

▶ 解法 1 (独立な 3 ベクトルで係数比較する)

【方針】

OA, OB, OC を独立な基底として 4 点の位置ベクトルを表す。同一平面条件を 2 方向の一次結合で書いて係数比較し、 t と s の関係を得る。(2) は角度条件を内積へ変換して $OP \cdot OQ = 0$ に代入する。

【解答】

(1) $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ とおく。3 ベクトルは一次独立であり、

$$A_0 = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad B_0 = \frac{1}{3}\vec{b}, \quad P = (1-s)\vec{a} + s\vec{c}, \quad Q = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

と表せる。

4 点の共面条件から、 $x + y + z = 1$ を満たす実数 x, y, z があって

$$Q = xA_0 + yB_0 + zP$$

と書ける。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数を比較すると

$$0 = \frac{x}{2} + (1-s)z, \quad 1-t = \frac{y}{3}, \quad t = sz$$

である。これらと $x + y + z = 1$ を用いて整理すると

$$t = \frac{2s}{s+1}$$

を得る。

(2) 条件から

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 1, \quad |\vec{c}|^2 = 4$$

である。 $OP \perp OQ$ より

$$0 = \{(1-s)\vec{a} + s\vec{c}\} \cdot \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} = -(1-s)(1-t) + (1-s)t + 4st$$

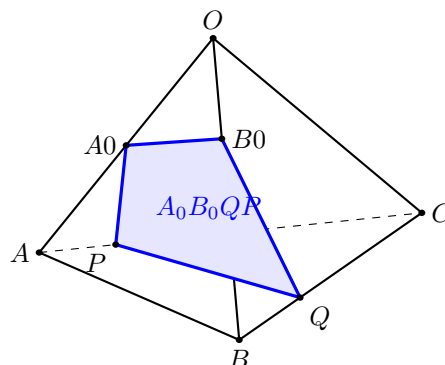
となる。 $t = 2s/(s+1)$ を代入すると

$$0 = 5s - 1$$

だから

$$s = \frac{1}{5}, \quad t = \frac{1}{3}$$

である。両値は指定範囲内にある。



▶ 解法 2 (基底座標で平面方程式を立てる)

【方針】

OA, OB, OC を座標軸とみなし, A_0, B_0, P を通る平面の方程式を $2x + 3y + \lambda z = 1$ と置く。点 P, Q の代入だけで t を求め, 後半は内積条件を一度に整理する。

【解答】

(1) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を基底とする座標では

$$A_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad B_0 = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right), \quad P = (1-s, 0, s), \quad Q = (0, 1-t, t)$$

である。 A_0, B_0, P を通る平面を

$$2x + 3y + \lambda z = 1$$

とおく。 P の代入から $\lambda = (2s-1)/s$, さらに Q の代入から

$$3(1-t) + \frac{2s-1}{s}t = 1$$

を得る。よって

$$t = \frac{2s}{s+1}$$

である。

(2) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 1, \quad |\vec{c}|^2 = 4$$

である。したがって

$$0 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -(1-s)(1-t) + (1-s)t + 4st$$

となる。 $t = 2s/(s+1)$ を代入すれば $5s-1=0$ だから

$$s = \frac{1}{5}, \quad t = \frac{1}{3}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 6。想定時間は 20 分程度。空間内の 4 点が同一平面上にある条件を、独立な 3 ベクトルの係数比較または基底座標の平面方程式へ翻訳するのが核心である。内分比では $P = (1-s)A + sC$, $Q = (1-t)B + tC$ の係数を逆にしないこと, (2) では角度から得る 3 つの内積の符号を確認することが重要である。最終値 $s = 1/5, t = 1/3$ を元の範囲へ戻して検算する。

【第 3 問】

n を自然数とし, t を $t \geq 1$ をみたす実数とする.

(1) $x \geq t$ のとき, 不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p, q の値を求めよ.

▶ 解法 1 (与えられた評価を区分求積へつなぐ)

【方針】

(1) は接線近似との差を導関数で上下から評価し, (2) は区間 $[t, t+1/n]$ で積分する. (3) では $t = 1 + k/n$ を代入して全区間を足し合わせ, 主項を定積分, 定数項を $1/x$ の区分求積で取り出す.

【解答】

(1) $F(x) = \log x - \log t - \frac{x-t}{t}$ とおく. $x \geq t$ において $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \leq 0$ であり, $F(t) = 0$ であるから $F(x) \leq 0$ である. これで右側の不等式が示された.

次に $G(x) = F(x) + \frac{(x-t)^2}{2}$ とおく. すると $G'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + x - t = (x-t) \left(1 - \frac{1}{tx}\right)$ である. $x \geq t \geq 1$ より $x-t \geq 0$ かつ $tx \geq 1$ だから, $G'(x) \geq 0$ である. また $G(t) = 0$ なので $G(x) \geq 0$ である. すなわち $F(x) + \frac{(x-t)^2}{2} \geq 0$ であるから $-\frac{(x-t)^2}{2} \leq F(x)$ を得る. 以上より $-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{x-t}{t} \leq 0$ である.

別解. (1) の左側は積分で見ることもしける. $x \geq t$ のとき

$$\log x - \log t - \frac{x-t}{t} = \int_t^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{t}\right) du = \int_t^x -\frac{u-t}{tu} du$$

である. $u \geq t \geq 1$ より $tu \geq 1$ だから $-(u-t) \leq -\frac{u-t}{tu} \leq 0$ である. これを $u = t$ から $u = x$ まで積分して $-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{x-t}{t} \leq 0$ を得る.

(2) (1) の不等式を $x = t$ から $x = t + \frac{1}{n}$ まで積分する. 中央の式については

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\frac{1}{n}} \left(\log x - \log t - \frac{x-t}{t}\right) dx \\ &= \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{t} \int_t^{t+\frac{1}{n}} (x-t) dx \\ &= \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \end{aligned}$$

である. また左端の積分は

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} -\frac{(x-t)^2}{2} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-t)^3}{3} \right]_t^{t+\frac{1}{n}} = -\frac{1}{6n^3}$$

である. したがって

$$-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$$

が成り立つ.

(3) (2) において $t = 1 + \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) とおく。このとき $t \geq 1$ であり、区間 $[t, t + \frac{1}{n}]$ は $\left[1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n}\right]$ である。よって (2) を $k = 0$ から $n-1$ まで加えると

$$-\frac{1}{6n^2} \leq \int_1^2 \log x \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \leq 0$$

となる。ここで $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ であるから、ある ε_n を用いて

$$\int_1^2 \log x \, dx - \frac{a_n}{n} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \varepsilon_n, \quad -\frac{1}{6n^2} \leq \varepsilon_n \leq 0$$

と書ける。これを a_n について解くと

$$a_n = n \int_1^2 \log x \, dx - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} - n\varepsilon_n$$

である。

まず

$$\int_1^2 \log x \, dx = [x \log x - x]_1^2 = 2 \log 2 - 1$$

である。また、和の極限として

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = \log 2$$

である。さらに $-\frac{1}{6n} \leq n\varepsilon_n \leq 0$ より $n\varepsilon_n \longrightarrow 0$ である。

したがって

$$a_n - n(2 \log 2 - 1) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right\} - n\varepsilon_n \longrightarrow -\frac{1}{2} \log 2$$

である。ゆえに $p = 2 \log 2 - 1$, $q = -\frac{1}{2} \log 2$ である。

▶ 解法 2 (対数の基本評価と左右リーマン和で挟む)

【方針】

$u = (x-t)/t$ と置いて $\log(1+u)$ の基本不等式から (1) を示し、(2) は積分する。(3) では左リーマン和と定積分の差を $f'(x) = 1/x$ の左右リーマン和で挟み、端点補正の極限を直接求める。

【解答】

(1) $u \geq 0$ に対して

$$u - \frac{u^2}{2} \leq \log(1+u) \leq u$$

が成り立つ。実際、両辺との差を微分すれば、それぞれ $u/(1+u) \geq 0$, $u^2/(1+u) \geq 0$ に帰着する。

ここで

$$u = \frac{x-t}{t} \geq 0$$

とおくと

$$-\frac{u^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{x-t}{t} \leq 0$$

である。 $t \geq 1$ より $u^2 \leq (x-t)^2$ なので

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{x-t}{t} \leq 0$$

を得る。

(2) (1) を $x = t$ から $x = t + 1/n$ まで積分する。左端は

$$-\frac{1}{2} \int_t^{t+1/n} (x-t)^2 dx = -\frac{1}{6n^3}$$

であり、中央は

$$\int_t^{t+1/n} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2}$$

である。したがって問題の不等式が従う。

(3) $f(x) = \log x$, $x_k = 1 + k/n$ とおくと

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \longrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 2 \log 2 - 1$$

である。よって有限な極限 $a_n - pn$ をもつためには

$$p = 2 \log 2 - 1$$

でなければならない。

定数項を求めるため

$$D_n = n \left\{ \int_1^2 f(x) dx - \frac{a_n}{n} \right\}$$

とおく。区間ごとに $x = x_k + u/n$ と変数を取り直すと

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left\{ f\left(x_k + \frac{u}{n}\right) - f(x_k) \right\} du$$

である。 $f'(x) = 1/x$ は減少するから

$$\frac{u}{n} f'(x_{k+1}) \leq f\left(x_k + \frac{u}{n}\right) - f(x_k) \leq \frac{u}{n} f'(x_k)$$

である。 u について積分し、さらに k について足すと

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_{k+1}) \leq D_n \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)$$

となる。両端はともに

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \log 2$$

へ収束する。したがって

$$a_n - pn = -D_n \longrightarrow -\frac{1}{2} \log 2$$

であり、

$$p = 2 \log 2 - 1, \quad q = -\frac{1}{2} \log 2$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 28 分程度。不等式の局所誤差を短区間で積分し、最後に全区間へ足し合わせて定数項まで取り出す問題である。(2) では区間幅 $1/n$ から $1/(2tn^2)$ と $1/(6n^3)$ が出る計算を省略しない。(3) は主項 p だけでなく、左リーマン和と定積分の差を n 倍した極限が $\log 2/2$ になることが核心である。2 解法は同じ端点補正を別の挟み方で評価している。

【第 4 問】

整数 a, b, c に関する次の条件 (*) を考える.

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \quad \cdots (*)$$

- (1) 整数 a, b, c が (*) および $a \neq b$ をみたすとき, c は 3 の倍数であることを示せ.
 (2) $c = 3600$ のとき, (*) および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) の個数を求めよ.

▶ 解法 1 (線形変換後に 3 進指数を数える)

【方針】

積分差を因数分解して $(2a + b)(a + 2b) = -3c^2$ を得る。(1) では 2 因子の 3 を法とする関係を調べ、(2) では $X = 2a + b, Y = a + 2b$ と変換する。符号を固定して正の約数対へ直し、3 の指数の端を除いて数える。

【解答】

(1) 条件 (*) の左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned} \int_a^c (x^2 + bx) dx - \int_b^c (x^2 + ax) dx \\ = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right]_a^c - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right]_b^c \end{aligned}$$

$= \frac{b-a}{6} \{2a^2 + 5ab + 2b^2 + 3c^2\}$ である。条件 (*) が成り立ち、かつ $a \neq b$ であるから $2a^2 + 5ab + 2b^2 + 3c^2 = 0$ である。左辺の二次式を因数分解して $(2a + b)(a + 2b) = -3c^2$ を得る。

右辺は 3 で割り切れるので、 $(2a + b)(a + 2b)$ は 3 で割り切れる。ここで $2a + b \equiv b - a \pmod{3}$, $a + 2b \equiv a - b \pmod{3}$ である。したがって一方の因子が 3 で割り切れるなら、もう一方の因子も 3 で割り切れる。よって $9 \mid (2a + b)(a + 2b)$ である。 $(2a + b)(a + 2b) = -3c^2$ だから $9 \mid 3c^2$ となり、 $3 \mid c^2$ を得る。整数 c について $3 \mid c^2$ なら $3 \mid c$ である。したがって c は 3 の倍数である。

(2) $X = 2a + b$, $Y = a + 2b$ とおくと $XY = -3c^2$ である。また $a = \frac{2X - Y}{3}$, $b = \frac{-X + 2Y}{3}$ であり、 $b - a = Y - X$ である。したがって $a < b$ は $X < Y$ と同値である。

いま $c = 3600$ なので $XY = -3 \cdot 3600^2$ である。右辺は負であり、 $X < Y$ であるから、 X は負、 Y は正でなければならない。そこで $X = -d$, $Y = e$ とおくと、 d, e は正の整数で $de = 3 \cdot 3600^2$ をみたす。

逆に、このような d, e から整数 a, b が得られる条件を調べる。上の式に $X = -d, Y = e$ を代入すると $a = \frac{-2d - e}{3}$, $b = \frac{d + 2e}{3}$ である。よって a, b が整数であるための条件は $2d + e \equiv 0 \pmod{3}$, $d + 2e \equiv 0 \pmod{3}$ であり、これは $d \equiv e \pmod{3}$ と同値である。

ここで $3 \cdot 3600^2 = 3 \cdot (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2)^2 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^4$ である。 d を $d = 2^i 3^j 5^k$ と書くと $0 \leq i \leq 8$, $0 \leq j \leq 5$, $0 \leq k \leq 4$ である。このとき $e = \frac{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^4}{d}$ である。

条件 $d \equiv e \pmod{3}$ をみたすには、 d, e がともに 3 で割り切れる必要がある。実際、 $j = 0$ なら d は 3 で割り切れず e は 3 で割り切れる。 $j = 5$ なら d は 3 で割り切れ e は 3 で割り切れない。どちらも $d \equiv e \pmod{3}$ をみたさない。反対に $1 \leq j \leq 4$ なら d, e はともに 3 で割り切れるので、どちらも 3 を法として 0 に合同であり、条件をみたす。

したがって選び方は $9 \cdot 4 \cdot 5 = 180$ 通りである。各 d に対して e は一意に決まり、そこから X, Y 、さらに a, b も一意に決まる。よって求める整数の組 (a, b) の個数は 180 である。

▶ 解法 2 (正の約数全体から不適合な端を除く)

【方針】

X, Y への線形変換で積の条件と大小条件を分離する。 $X = -d, Y = e$ として全正約数 d を数え、整数 a, b を与えないのが 3 の指数を片側へ全部寄せた 2 群だけであることから差し引く。

【解答】

(1) 条件の両辺を積分して差を取ると、 $a \neq b$ より

$$(2a + b)(a + 2b) = -3c^2$$

を得る。ここで

$$(2a + b) + (a + 2b) = 3(a + b)$$

である。積が 3 の倍数なので一方の因子は 3 の倍数であり、和も 3 の倍数だから他方も 3 の倍数である。したがって左辺は 9 の倍数であり、 $9 \mid 3c^2$ となる。よって $3 \mid c^2$ 、したがって $3 \mid c$ である。

(2)

$$X = 2a + b, \quad Y = a + 2b$$

とおくと

$$XY = -3 \cdot 3600^2, \quad a = \frac{2X - Y}{3}, \quad b = \frac{-X + 2Y}{3}$$

である。また $b - a = Y - X$ なので、 $a < b$ と積が負であることから $X < 0 < Y$ となる。

$X = -d, Y = e$ とおくと、 d, e は正で

$$de = 3 \cdot 3600^2 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^4$$

を満たす。逆変換が整数を与える条件は

$$d \equiv e \pmod{3}$$

である。

正の約数 d の総数は

$$(8 + 1)(5 + 1)(4 + 1) = 270$$

である。 d に含まれる 3 の指数を j とすると、 $j = 0$ では d だけが 3 で割れず、 $j = 5$ では e だけが 3 で割れないため不適合である。各端の個数は

$$(8 + 1)(4 + 1) = 45$$

である。 $1 \leq j \leq 4$ なら d, e はともに 3 の倍数で、必ず合同条件を満たす。よって求める個数は

$$270 - 45 - 45 = 180$$

である。各約数 d から (a, b) は一意に定まるので重複はない。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 25 分程度。文系第 3 問と同じ因数分解を、 $c = 3600$ の約数カウントまで発展させる問題である。 $X = 2a + b, Y = a + 2b$ と置いた後、 $a < b$ から $X < 0 < Y$ を確定し、正の約数だけを数えるのが整理の要点である。 $3 \cdot 3600^2 = 2^8 3^5 5^4$ の 3 の指数 $j = 0, 5$ は一方だけが 3 の倍数となって除外され、 $1 \leq j \leq 4$ の 4 通りが残る。総数は $9 \cdot 4 \cdot 5 = 180$ と差し引き法の両方で一致する。

【第 5 問】

次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする. x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち, $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ.
- (2) 自然数 n に対し, $x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく. t を $|t| < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする. このとき, 曲線 $C: y = \sin x$ 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線が, 不等式 $x \geq \frac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は, t が $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかと等しいことであることを示せ.

▶ 解法 1 (接線の傾きと切片を比較する)

【方針】

$h(x) = x - \tan x$ の狭義単調性と両端極限で (1) の一意性を示す. (2) では 2 点での接線が同じ直線になる条件を傾きと切片に分け, $\cos u = \cos t$ の 2 系列を分類して不要な系列を除外する.

【解答】

(1) $h(x) = x - \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) とおく. 導関数は $h'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leq 0$ である. さらに, 任意の $x_1 < x_2$ に対して

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} -\tan^2 x \, dx < 0$$

である. 実際, $\tan^2 x$ は連続で, 区間全体で恒等的に 0 にはならない. したがって $h(x)$ はこの区間で狭義単調減少である. また

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} (x - \tan x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (x - \tan x) = -\infty$$

である. よって $h(x)$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で実数全体の値を一度ずつ取る. したがって任意の実数 a に対し, 方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち $|x| < \frac{\pi}{2}$ をみたすものはちょうど 1 個である.

(2) 曲線 $C: y = \sin x$ の $x = t$ における接線は $y = \sin t + \cos t(x - t)$ である. これを $y = (\cos t)x + \sin t - t \cos t$ と書いておく.

この直線が $x = u$ においても曲線 C に接するとする. ただし $u \geq \frac{\pi}{2}$ である. $x = u$ における接線は $y = (\cos u)x + \sin u - u \cos u$ であるから, 2 つの接線が一致するための必要十分条件は $\cos u = \cos t$ かつ $\sin u - u \cos u = \sin t - t \cos t$ である. いま $|t| < \frac{\pi}{2}$ なので $\cos t > 0$ である. $\cos u = \cos t$ から $u = t + 2m\pi$ または $u = -t + 2m\pi$ と表される.

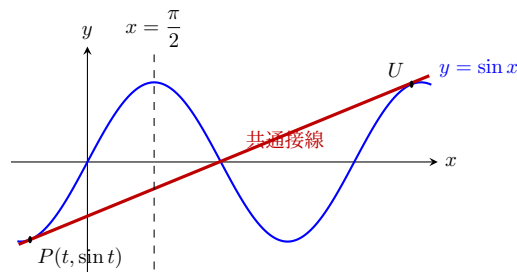
まず $u = t + 2m\pi$ の場合を考える. このとき $\sin u = \sin t$, $\cos u = \cos t$ だから, 切片条件は $\sin t - (t + 2m\pi) \cos t = \sin t - t \cos t$ となる. $\cos t > 0$ より $m = 0$ である. しかしこのとき $u = t < \frac{\pi}{2}$ となり, $u \geq \frac{\pi}{2}$ に反する. よってこの場合は起こらない.

したがって $u = -t + 2m\pi$ でなければならない. $|t| < \frac{\pi}{2}$ で $u \geq \frac{\pi}{2}$ だから, m は自然数である. これを n と書く. すると $\sin u = -\sin t$, $\cos u = \cos t$ であるから, 切片条件は $-\sin t - (-t + 2n\pi) \cos t = \sin t - t \cos t$ となる. 整理すると $2t \cos t - 2n\pi \cos t - 2 \sin t = 0$ である. $\cos t > 0$ で割ると $t - \tan t = n\pi$ を得る. したがって, (1) の一意性により $t = x_n$ である. これで必要性が示された.

逆に, $t = x_n$ とする. このとき $t - \tan t = n\pi$ である. $n\pi > 0$ であり, $h(0) = 0$, かつ h は狭義単調減少だから $t < 0$ である. そこで $u = -t + 2n\pi$ とおくと, $u \geq \frac{\pi}{2}$ である. また $\cos u = \cos t$, $\sin u = -\sin t$ である.

さらに $t - \tan t = n\pi$ は $t \cos t - \sin t = n\pi \cos t$ と同値である. これを用いると $-\sin t - (-t + 2n\pi) \cos t = \sin t - t \cos t$ が成り立つ. すなわち $\sin u - u \cos u = \sin t - t \cos t$ である. よって $x = t$ における接線と $x = u$ における接線は一致し, しかも $u \geq \frac{\pi}{2}$ である.

以上より, 曲線 C 上の点 $P(t, \sin t)$ における接線が, $x \geq \frac{\pi}{2}$ の領域に含まれる点でも C と接するための必要十分条件は, t が $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかと等しいことである.



▶ 解法 2 (第二接点を三角関数の周期で分類する)

【方針】

接線が別の点 u でも接するなら、その直線上条件と微分係数条件を同時に満たす。 $\cos u = \cos t$ から $u = 2k\pi \pm t$ を得て各場合を直接代入し、第二接点が右半平面にある条件から k を自然数に限定する。

【解答】

(1)

$$\phi(x) = \tan x - x, \quad \phi'(x) = \tan^2 x \geq 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく。任意の異なる 2 点間で ϕ' の積分は正だから、 ϕ は狭義単調増加である。また

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2+0} \phi(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \phi(x) = +\infty$$

なので、 $x - \tan x = a$ 、すなわち $\phi(x) = -a$ はこの区間にちょうど 1 個の解をもつ。

(2) 点 $P(t, \sin t)$ における接線と、この直線が $u \geq \pi/2$ でも曲線に接するための必要十分条件は

$$y = \sin t + (x - t) \cos t, \quad \cos u = \cos t, \quad \sin u = \sin t + (u - t) \cos t$$

である。第 2 式から

$$u = 2k\pi + t \quad \text{または} \quad u = 2k\pi - t$$

を得る。前者を第 3 式へ代入すると $2k\pi \cos t = 0$ となる。 $|t| < \pi/2$ では $\cos t > 0$ だから $k = 0$ 、すなわち $u = t < \pi/2$ となり不適である。

後者では $\sin u = -\sin t$ なので、第 3 式は

$$-\sin t = \sin t + (2k\pi - 2t) \cos t \iff t - \tan t = k\pi$$

となる。さらに $u = 2k\pi - t \geq \pi/2$ と $|t| < \pi/2$ から $k \geq 1$ である。 $k = n$ と書けば、(1) の一意性により $t = x_n$ を得る。

逆に $t = x_n$ 、 $u = 2n\pi - t$ とおくと $u \geq \pi/2$ 、 $\cos u = \cos t$ 、 $\sin u = -\sin t$ である。さらに $t - \tan t = n\pi$ を変形すれば

$$\sin u = \sin t + (u - t) \cos t$$

も成り立つ。したがって同じ直線が $x = t, u$ の 2 点で曲線に接する。

以上から必要十分条件は、 t が $x_1, x_2, x_3, \dots$ のいずれかに等しいことである。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 25 分程度。(1) では導関数が 1 点で 0 になるため、区間全体で狭義単調となる理由まで示す。(2) では 2 接点の傾きと切片を比較し、 $u = 2k\pi + t$ を除外して $u = 2k\pi - t$ を残す。必要性に加え、 $u = 2n\pi - t$ を作る十分性まで確認する。