

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



大 阪 大 学 2023 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

$n$  を 2 以上の自然数とする.

(1)  $0 \leq x \leq 1$  のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  とするとき, 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

## 第 2 問

平面上の 3 点  $O, A, B$  が

$$|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする.

(1)  $(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$  を求めよ.

(2) 平面上の点  $P$  が

$$|\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{OP} \cdot (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき,  $|\overrightarrow{OP}|$  の最大値と最小値を求めよ.

### 第 3 問

$P$  を座標平面上の点とし、点  $P$  の座標を  $(a, b)$  とする． $-\pi \leq t \leq \pi$  の範囲にある実数  $t$  のうち、曲線  $y = \cos x$  上の点  $(t, \cos t)$  における接線が点  $P$  を通るという条件をみたすものの個数を  $N(P)$  とする． $N(P) = 4$  かつ  $0 < a < \pi$  をみたすような点  $P$  の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

## 第 4 問

$a, b$  を  $a^2 + b^2 > 1$  かつ  $b \neq 0$  をみたす実数の定数とする. 座標空間の点  $A(a, 0, b)$  と点  $P(x, y, 0)$  をとる. 点  $O(0, 0, 0)$  を通り直線  $AP$  と垂直な平面を  $\alpha$  とし, 平面  $\alpha$  と直線  $AP$  との交点を  $Q$  とする.

(1)  $(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$  が成り立つことを示せ.

(2)  $|\overrightarrow{OQ}| = 1$  をみたすように点  $P(x, y, 0)$  が  $xy$  平面上を動くとき, 点  $P$  の軌跡を求めよ.

## 第 5 問

1 個のさいころを  $n$  回投げて、 $k$  回目に出た目を  $a_k$  とする． $b_n$  を

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$$

により定義し、 $b_n$  が 7 の倍数となる確率を  $p_n$  とする．

- (1)  $p_1, p_2$  を求めよ．
- (2) 数列  $\{p_n\}$  の一般項を求めよ．

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)