

大阪大学 2023 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 n を 2 以上の自然数とする。(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は有限等比和を用いて、括弧内そのものを $\frac{(-x)^n}{1+x}$ に簡約する。あとは $0 \leq x \leq 1$ における $\frac{1}{1+x}$ の上下評価に帰着する。(2) は (1) を 0 から 1 まで積分し、左辺が交代調和級数の誤差 $(-1)^n(\log 2 - a_n)$ になることを確認してから、 n 倍してはさみうちを使う。

【解答】

(1) まず

$$1 + \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-x)^j = \frac{1 - (-x)^n}{1+x}$$

である。したがって

$$\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1 - (-x)^n}{1+x} = \frac{(-x)^n}{1+x}$$

となる。両辺に $(-1)^n$ をかけると

$$(-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} = \frac{x^n}{1+x}$$

である。

ここで $0 \leq x \leq 1$ なら $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1-x}{2(1+x)} \geq 0$ である。また $1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)} \geq 0$ だから $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - \frac{x}{2}$ が成り立つ。これに $x^n \geq 0$ をかけて $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$ を得る。先ほどの等式に戻せば、求める不等式が示された。

(2) (1) の中央の式を 0 から 1 まで積分する。左辺の括弧内について

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right) dx = \log 2 - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 - a_n$$

である。よって

$$(-1)^n (\log 2 - a_n) = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

である。

(1) の不等式を積分すると

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \leq (-1)^n (\log 2 - a_n) \leq \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \right) dx$$

である。すなわち

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n (\log 2 - a_n) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

となる。

両辺に n をかけると

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq (-1)^n n (\log 2 - a_n) \leq \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

であり、左右の端はどちらも $\frac{1}{2}$ に収束する。はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (\log 2 - a_n) = \frac{1}{2}$ である。求める極限は符号が反対なので $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (a_n - \log 2) = -\frac{1}{2}$ である。

▶ 解法 2 (1/2 まわりの精密評価)

【方針】

有限等比和から中央の式を $x^n/(1+x)$ に直す点は同じだが、(2) では $1/(1+x)$ を $1/2$ のまわりで上下から一次式評価する。積分余項 E_n に対して標準解法より少し鋭い上下界を作り、直接 $nE_n \rightarrow 1/2$ を示す。

【解答】

(1) 有限等比和より

$$1 + \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1+x}$$

だから、問題の中央の式は

$$(-1)^n \left\{ \frac{1}{1+x} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} = \frac{x^n}{1+x}$$

に等しい。 $0 \leq x \leq 1$ では

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - \frac{x}{2}$$

であるから、両辺に x^n を掛ければ問題の不等式を得る。

(2)

$$E_n = (-1)^n (\log 2 - a_n) = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

とおく。ここで $0 \leq x \leq 1$ において

$$\frac{3-x}{4} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{2-x}{2} \tag{1}$$

が成り立つ。実際、左側は

$$\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} = \frac{(1-x)^2}{4(1+x)} \geq 0$$

であり、右側は

$$\frac{2-x}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)} \geq 0$$

である。

(1) に x^n を掛けて積分すると

$$\frac{3}{4(n+1)} - \frac{1}{4(n+2)} \leq E_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

両辺を整理して n 倍すると

$$\frac{n(2n+5)}{4(n+1)(n+2)} \leq nE_n \leq \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

左右はともに $1/2$ へ収束するので $nE_n \rightarrow 1/2$ である。求める式は $-nE_n$ だから、極限值は

$$-\frac{1}{2}$$

である。

【総評】 交代調和級数の誤差を、問題文の不等式を通して評価する誘導型の極限問題。目安時間は 20～24 分。(1) では有限等比和の初項と終項を取り違えないこと、(2) では積分後に $\log 2 - a_n$ が出るため最終的な符号が反転することが重要である。別解を無理に作るより、誘導の等式化、積分、はさみうちの 3 段階を明確に書く方が採点上強い。公式出題意図は不等式の証明と、その不等式を利用した数列極限である。標準のはさみうちに加え、 $1/2$ まわりの一次式評価で極限の符号と値を再確認した。

【第 2 問】

平面上の 3 点 O, A, B が

$$|2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1) $(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB})$ を求めよ。

(2) 平面上の点 P が

$$|\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot (2\vec{OA} + \vec{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき、 $|\vec{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$\vec{u} = 2\vec{OA} + \vec{OB}$ 、 $\vec{v} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$ とおくと、 $\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{3}$ である。条件から $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が単位直交ベクトルになることをまず示す。(2) では $\vec{OP} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ と座標化し、中心 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 、半径 $\frac{1}{3}$ の円板を半平面 $X \leq \frac{1}{3}$ で切った領域で、原点からの距離の最大・最小を調べる。

【解答】

(1)

$$\vec{u} = 2\vec{OA} + \vec{OB}, \quad \vec{v} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$$

とおく。条件より $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ である。また $\vec{u} + \vec{v} = 3(\vec{OA} + \vec{OB})$ だから $\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{3}$ である。与えられた内積条件は $\vec{u} \cdot \frac{\vec{u} + \vec{v}}{3} = \frac{1}{3}$ と書ける。両辺を 3 倍して $|\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ である。 $|\vec{u}| = 1$ より $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ を得る。したがって

$$(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) = 0$$

である。

(2) (1) より $\vec{u}, \vec{v}$ は互いに垂直な単位ベクトルである。平面上の任意の点 P について $\vec{OP} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ と表すと、 $|\vec{OP}|^2 = X^2 + Y^2$ である。

さらに $\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{3}$ なので、1 つ目の条件は $(X - \frac{1}{3})^2 + (Y - \frac{1}{3})^2 \leq \frac{1}{9}$ となる。2 つ目の条件は

$$\vec{OP} \cdot \vec{u} = (X\vec{u} + Y\vec{v}) \cdot \vec{u} = X \leq \frac{1}{3}$$

である。したがって (X, Y) の動く範囲は、中心 $C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 、半径 $\frac{1}{3}$ の円板のうち、直線 $X = \frac{1}{3}$ の左側である。

最小値を考える。原点 $O' = (0, 0)$ から中心 C までの距離は

$$O'C = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

であり、これは半径 $\frac{1}{3}$ より大きい。したがって円板全体での最短距離は $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$ である。この最短点は中心から原点方向に半径だけ進んだ点で、座標は $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ であるから、確かに $X < \frac{1}{3}$ をみたす。よってこの値が条件下での最小値である。

次に最大値を考える。領域の境界は、円周の左半分と線分 $X = \frac{1}{3}$ からなる。線分上では $X = \frac{1}{3}$, $0 \leq Y \leq \frac{2}{3}$ だから、 $X^2 + Y^2$ の最大は $Y = \frac{2}{3}$ のときで、値は $(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$ である。

円周の左半分では

$$X = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos \phi, \quad Y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin \phi, \quad \cos \phi \leq 0$$

とおける。このとき $X^2 + Y^2 = \frac{3 + 2(\cos \phi + \sin \phi)}{9}$ である。 $\cos \phi \leq 0$ のもとでは、 $\sin \phi \leq 0$ なら $\cos \phi + \sin \phi \leq 0$ 、 $\sin \phi > 0$ なら $\cos \phi + \sin \phi \leq \sin \phi \leq 1$ である。したがって $\cos \phi + \sin \phi \leq 1$ であり、等号は $(\cos \phi, \sin \phi) = (0, 1)$ のとき成り立つ。よって円周上でも最大の $X^2 + Y^2$ は $\frac{5}{9}$ である。

以上から

$$|\overrightarrow{OP}|_{\min} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}, \quad |\overrightarrow{OP}|_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。

▶ 解法 2 (距離の不等式で直接評価する方法)

【方針】

$\vec{u} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ が単位直交ベクトルであることを使い、 $\overrightarrow{OP} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ とおく。最小値は三角不等式で評価し、最大値は円板条件を展開して $X + Y \leq 1$ と合わせることで、境界を媒介変数表示せず直接上から押さえる。

【解答】

(1)

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$$

とおく。 $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ であり、 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (\vec{u} + \vec{v})/3$ だから、与えられた内積条件は

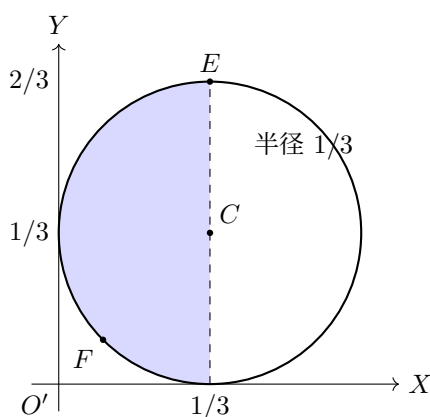
$$\vec{u} \cdot \frac{\vec{u} + \vec{v}}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。よって $|\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ であり、 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ を得る。したがって求める内積は 0 である。

(2) $\overrightarrow{OP} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ とおくと、条件は

$$\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{9}, \quad X \leq \frac{1}{3}$$

となる。領域は次図の青い半円板である。



中心を表すベクトルを $\vec{c} = (\vec{u} + \vec{v})/3$ とすれば $|\vec{c}| = \sqrt{2}/3$ である。円板条件と三角不等式から

$$|\overrightarrow{OP}| \geq |\vec{c}| - |\overrightarrow{OP} - \vec{c}| \geq \frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$

等号を与える点は

$$(X, Y) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

で、 $X < 1/3$ を満たす。したがって最小値は $(\sqrt{2}-1)/3$ である。

次に円板条件を展開すると

$$X^2 + Y^2 \leq \frac{2}{3}(X + Y) - \frac{1}{9}. \quad (1)$$

また円板全体で $Y \leq 2/3$ であり、半平面条件から $X \leq 1/3$ だから $X + Y \leq 1$ である。(1) より

$$X^2 + Y^2 \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

等号は $(X, Y) = (1/3, 2/3)$ で成り立つ。よって最大値は $\sqrt{5}/3$ である。

【総評】 与えられた複雑なベクトルを、単位直交基底に作り替える発想が核心である。目安時間は 20~25 分。(1) の値 0 は単なる計算結果ではなく、(2) で座標平面として使うための準備になっている。最小値は円板全体の最近点が半平面内に残るかを確認し、最大値は切り落とされた右上方向ではなく直径の上端で出る点を明示すると、図形的な答案として安定する。大阪大学公式の出題意図どおり、内積・長さの基本計算から直交座標を設定し、不等式が表す領域を正確に読む問題である。境界走査と直接不等式評価の 2 通りを相互検算に使える。

【第 3 問】

P を座標平面上の点とし、点 P の座標を (a, b) とする。 $-\pi \leq t \leq \pi$ の範囲にある実数 t のうち、曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(P)$ とする。 $N(P) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

点 (a, b) を通る接線条件を $b = g(t) = \cos t + (t - a) \sin t$ に変え、水平線 $y = b$ と $g(t)$ の交点数を数える。導関数は $g'(t) = (t - a) \cos t$ なので、臨界点は $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, a$ である。 a が $\frac{\pi}{2}$ の左か右かで臨界点の順序が変わるため場合分けし、各単調区間に 1 個ずつ交点を持つための b の範囲を、端点で重複しないよう开区間で表す。

【解答】

曲線 $y = \cos x$ の $x = t$ における接線は、傾きが $-\sin t$ であるから $y = \cos t - \sin t(x - t)$ である。これが点 $P(a, b)$ を通る条件は $b = \cos t + (t - a) \sin t$ である。そこで $g(t) = \cos t + (t - a) \sin t$ ($-\pi \leq t \leq \pi$) とおく。求める $N(P)$ は、水平線 $y = b$ と $y = g(t)$ の交点数である。

微分すると $g'(t) = -\sin t + \sin t + (t - a) \cos t = (t - a) \cos t$ である。また、必要な値は $g(-\pi) = -1$, $g(\pi) = -1$,

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a + \frac{\pi}{2}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - a, \quad g(a) = \cos a$$

である。

まず $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき臨界点の順序は $-\pi < -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} < \pi$ であり、 $g'(t)$ の符号から $g(t)$ は順に、増加、減少、増加、減少する。さらに $\cos a < \frac{\pi}{2} - a$ である。実際、 $h(a) = \frac{\pi}{2} - a - \cos a$ とおくと、 $h'(a) = \sin a - 1 < 0$ かつ $h(\frac{\pi}{2}) = 0$ なので、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ では $h(a) > 0$ である。

この場合、4 つの単調区間の値域を合わせて見ると、水平線が 4 回交わるためには、局所最小値 $g(a) = \cos a$ より上で、右側の局所最大値 $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - a$ より下でなければならない。逆に $\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$ なら 4 つの単調区間それぞれの内部でちょうど 1 回ずつ交わる。境界で等号になると、 $t = a$ または $t = \frac{\pi}{2}$ で交点が重なり、個数は 4 にならない。

次に $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ とする。このとき臨界点の順序は $-\pi < -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < a < \pi$ であり、 $g(t)$ は順に、増加、減少、増加、減少する。また $\frac{\pi}{2} - a < \cos a$ である。これは $k(a) = \cos a + a - \frac{\pi}{2}$ とおくと、 $k'(a) = 1 - \sin a > 0$, $k(\frac{\pi}{2}) = 0$ から従う。

この場合、中央の谷の値は $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - a$ 、右側の山の値は $g(a) = \cos a$ である。4 つの単調区間すべてで 1 回ずつ交わるには、右端および左端の値 -1 よりも上にあり、かつ中央の谷よりも上にあり、さらに右側の山よりも下にある必要がある。したがって条件は $\max\left\{-1, \frac{\pi}{2} - a\right\} < b < \cos a$ である。ここでも等号の場合は端点または極値で交点が重なるため、 $N(P) = 4$ にはならない。 $a = \frac{\pi}{2}$ のときは $t = a$ と $t = \frac{\pi}{2}$ が重なり、単調区間が 4 本に分かれなないので、4 個の解は生じない。

以上より、求める存在範囲は $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$ または $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, $\max\left\{-1, \frac{\pi}{2} - a\right\} < b < \cos a$ である。図示すると、左側 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ では下側境界が $b = \cos a$ 、上側境界が直線 $b = \frac{\pi}{2} - a$ である。右側では上側境界が

$b = \cos a$ 、下側境界は $a = \frac{\pi}{2} + 1$ までは直線 $b = \frac{\pi}{2} - a$ 、それ以後は直線 $b = -1$ に切り替わる。すべての境界線は含まれない。

▶ 解法 2 (解の個数が変わる境界を先に求める方法)

【方針】

接線条件を $b = \cos t + (t - a) \sin t$ とする。解の個数が変わるのは、解が重解になるときか端点 $t = \pm\pi$ を通るときである。重解条件から境界曲線 $b = \cos a$, $b = \pi/2 - a$, $b = a + \pi/2$ を先に出し、端点境界 $b = -1$ と合わせて平面を分割し、4 解をもつ領域を選ぶ。

【解答】

接線条件は

$$b = \cos t + (t - a) \sin t$$

である。左辺へ移した式を $H(t) = \cos t + (t - a) \sin t - b$ とおく。解の個数が変わり得る境界は、区間内部で重解が生じる場合と、端点が解になる場合である。

$$H'(t) = (t - a) \cos t$$

だから、重解候補は $t = a, \pm\pi/2$ である。これらを $H(t) = 0$ に代入すると

$$b = \cos a, \quad b = \frac{\pi}{2} - a, \quad b = a + \frac{\pi}{2}$$

を得る。また $t = \pm\pi$ ではともに $b = -1$ である。

$0 < a < \pi/2$ では、4 本の単調な枝に対応する値の順序は

$$-1 < \cos a < \frac{\pi}{2} - a < a + \frac{\pi}{2}$$

である。したがって 4 解をもつのは

$$\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$$

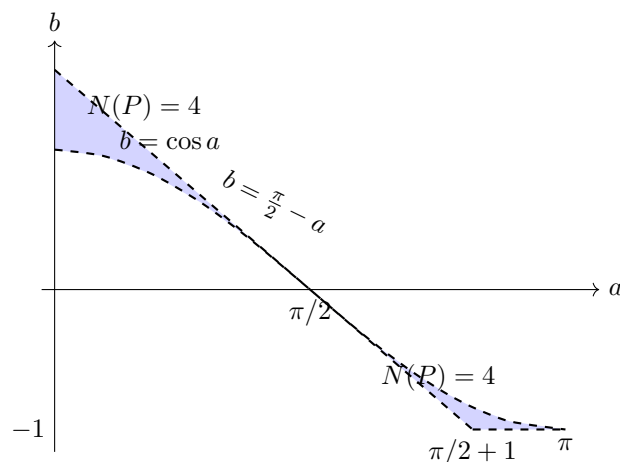
の部分である。

$\pi/2 < a < \pi$ では $\pi/2 - a < \cos a$ であり、左右の端点値 -1 も下側境界になる。よって 4 解をもつ条件は

$$\max\left\{-1, \frac{\pi}{2} - a\right\} < b < \cos a$$

である。 $\pi/2 - a = -1$ となる $a = \pi/2 + 1$ で下側境界が直線 $b = -1$ に切り替わる。重解または端点解を生じる境界上では個数が 4 にならないので、いずれも含めない。

以上を図示すると次の青い領域である。



【総評】 接線の本数を、1 変数関数と水平線の交点数に翻訳する難度の高い分類問題。目安時間は 30～35 分。計算自体は $g'(t) = (t - a) \cos t$ と短いのが、 $a = \frac{\pi}{2}$ を境に臨界点の順序が変わるため、増減表を省略すると境界を誤りやすい。等号を含めると接線の接点パラメータが重複して個数が減るので、存在範囲はすべて開境界で描くことが採点上の大きな注意点である。公式出題意図は接線、三角関数、微分、方程式の解の個数を不等式で表して図示する力である。増減表による方法と、重解・端点境界から平面を分割する方法の両方で開境界を確認した。

【第 4 問】

a, b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする. 座標空間の点 $A(a, 0, b)$ と点 $P(x, y, 0)$ をとる. 点 $O(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし, 平面 α と直線 AP との交点を Q とする.

(1) $(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$ が成り立つことを示せ.

(2) $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ をみたすように点 $P(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき, 点 P の軌跡を求めよ.

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ とおき, Q を $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}$ と表す. 平面 α は直線 AP に垂直なので $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{v} = 0$ が成り立ち, Q は原点から直線 AP に下ろした垂線の足である. (1) で射影の長さの関係を示し, (2) では $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ から $|\overrightarrow{AQ}|^2 = a^2 + b^2 - 1$ を得て, 内積と距離を座標で展開する. 最後に逆向きも確認し, 得た二次方程式全体が軌跡であることを述べる.

【解答】

(1) $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ とおく. 点 Q は直線 AP 上にあるので, ある実数 λ を用いて $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}$ と表せる. また, 平面 α は直線 AP と垂直であり, O, Q はともに平面 α 上にある. したがって $\overrightarrow{OQ}$ は $\vec{v}$ と垂直で, $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{v} = 0$ である. これに上の表示を代入すると $(\overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ だから $\lambda = -\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$ である.

一方, $\overrightarrow{AQ} = \lambda \vec{v}$ なので

$$|\overrightarrow{AQ}|^2 = \lambda^2 |\vec{v}|^2 = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{v}|^2}$$

となる. ここで $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$ であるから,

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = (\vec{v} \cdot (-\overrightarrow{OA}))^2 = (\overrightarrow{OA} \cdot \vec{v})^2$$

である. よって

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$$

が成り立つ.

(2) $A(a, 0, b)$, $P(x, y, 0)$ より $\overrightarrow{AP} = (x - a, y, -b)$, $\overrightarrow{AO} = (-a, 0, -b)$ である. したがって $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = a^2 + b^2 - ax$ かつ $|\overrightarrow{AP}|^2 = (x - a)^2 + y^2 + b^2$ である. Q は直線 AP 上にあり, $OQ \perp AP$ であるから, $OQ \perp AQ$ でもある. よって三角形 OAQ は Q を直角とする直角三角形である. $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ のとき

$$|\overrightarrow{AQ}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OQ}|^2 = a^2 + b^2 - 1$$

となる. 仮定 $a^2 + b^2 > 1$ より, この値は正である.

(1) の式に代入して $(a^2 + b^2 - ax)^2 = ((x - a)^2 + y^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 1)$ を得る. 左辺から右辺を引いて整理すると $(a^2 + b^2 - ax)^2 - ((x - a)^2 + y^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 1) = (1 - b^2)x^2 - 2ax + (1 - a^2 - b^2)y^2 + a^2 + b^2$ である. したがって必要条件として $(1 - b^2)x^2 - 2ax + (1 - a^2 - b^2)y^2 + a^2 + b^2 = 0$ を得る.

逆に, 点 $P(x, y, 0)$ がこの方程式をみたすとする. 上の整理を逆にたどると

$$(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 (a^2 + b^2 - 1)$$

である. $b \neq 0$ なので $|\overrightarrow{AP}| > 0$ であり, (1) から $|\overrightarrow{AQ}|^2 = a^2 + b^2 - 1$ となる. 直角三角形 OAQ により

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2 = (a^2 + b^2) - (a^2 + b^2 - 1) = 1$$

である. よって $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ が成り立つ.

したがって, 求める点 P の軌跡は xy 平面上の二次曲線 $(1 - b^2)x^2 - 2ax + (1 - a^2 - b^2)y^2 + a^2 + b^2 = 0$ である.

▶ 解法 2 (三角形の面積を 2 通りに表す方法)

【方針】

Q は原点から直線 AP に下ろした垂線の足である。三角形 OAP の面積の 2 乗を、底辺 $AP \cdot$ 高さ OQ で表す方法と、 $\vec{OA}, \vec{OP}$ の内積で表す方法の 2 通りで計算する。 $|OQ| = 1$ を代入すると、射影係数を求めずに軌跡の二次方程式が得られる。

【解答】

(1) $OQ \perp AP$ であり、 A, Q, P は一直線上にあるから、三角形 OAQ は Q を直角とする。よって

$$\vec{AO} \cdot \vec{AP} = |AQ| |AP|$$

が符号を除いて成り立つ。両辺を 2 乗すれば

$$(\vec{AP} \cdot \vec{AO})^2 = |\vec{AP}|^2 |\vec{AQ}|^2$$

を得る。

(2) 三角形 OAP の面積を S とする。底辺を AP 、高さを $OQ = 1$ と見れば

$$4S^2 = |AP|^2 = (x - a)^2 + y^2 + b^2. \quad (1)$$

一方、二辺 $\vec{OA} = (a, 0, b)$, $\vec{OP} = (x, y, 0)$ を用いると

$$4S^2 = |\vec{OA}|^2 |\vec{OP}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OP})^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} 4S^2 &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - a^2 x^2 \\ &= b^2 x^2 + (a^2 + b^2)y^2. \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2) を等置すると

$$b^2 x^2 + (a^2 + b^2)y^2 = (x - a)^2 + y^2 + b^2.$$

整理して

$$(1 - b^2)x^2 - 2ax + (1 - a^2 - b^2)y^2 + a^2 + b^2 = 0$$

を得る。

逆にこの方程式を満たす点 P では、上の面積の等式を逆にたどると、直線 AP への原点からの距離が 1 となる。 $b \neq 0$ より $A \neq P$ なので直線は確定し、その垂線の足が Q である。よって方程式全体が求める軌跡である。

【総評】 空間内の直線への垂線の足を、ベクトルの射影として処理する軌跡問題。目安時間は 25~30 分。(1) は (2) のための公式作りであり、 Q が「原点から直線 AP へ下ろした垂線の足」だと捉えると自然に進む。展開では $a^2 + b^2 - ax$ の符号ではなく 2 乗を使うため、途中で平方根を取らないことが安全である。最後に逆向きを書くと、得た方程式が単なる必要条件でないことを保証できる。公式出題意図は空間図形・空間ベクトル・二次曲線であり、(1) の関係を証明して (2) の軌跡を決める構成である。射影による方法と三角形の面積による方法が同じ二次方程式を与える。

【第 5 問】

1 個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目を a_k とする。 b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$$

により定義し、 b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

定義から $b_n = a_1 b_{n-1} + a_n$ が成り立つので、7 で割った余りだけを追う。さいころの目 $1, 2, \dots, 6$ はいずれも 7 で割って 0 でないため、 b_{n-1} が 0 なら次は 0 になれず、0 でなければ a_n の選び方がちょうど 1 通りある。この 2 状態の遷移から $p_n = \frac{1-p_{n-1}}{6}$ を導き、固定値 $\frac{1}{7}$ からのずれとして解く。最後に数え上げによる別解でも同じ一般項を確認する。

【解答】

(1) $n = 1$ のとき $b_1 = a_1$ である。さいころの目は $1, 2, \dots, 6$ なので、 b_1 が 7 の倍数になることはない。したがって $p_1 = 0$ である。 $n = 2$ のとき $b_2 = a_1^2 + a_2$ である。 a_1 は 7 で割って 0 でない余りを持つから、 $-a_1^2$ も 7 で割って 0 でない余りである。したがって、 $a_2 = 1, 2, \dots, 6$ の中に $a_2 \equiv -a_1^2 \pmod{7}$ をみたすものがちょうど 1 つある。 a_1 の 6 通りそれぞれに対して a_2 は 1 通りなので、有利な組は 6 通りである。よって $p_2 = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ である。

(2) 定義より、 $n \geq 2$ に対して $b_n = a_1 b_{n-1} + a_n$ が成り立つ。実際、

$$a_1 b_{n-1} = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} a_1^{n-1-k} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_1^{n-k} a_k$$

であり、これに a_n を加えれば b_n になる。

以下、7 で割った余りを考える。 a_1 は $1, 2, \dots, 6$ のいずれかなので、7 で割って 0 ではない。

もし $b_{n-1} \equiv 0 \pmod{7}$ なら $b_n \equiv a_n \pmod{7}$ であり、 a_n は 7 の倍数ではないから b_n は 7 の倍数にならない。

一方、 $b_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{7}$ なら、 $a_1 b_{n-1}$ も 7 で割って 0 でない。したがって $a_n \equiv -a_1 b_{n-1} \pmod{7}$ をみたす $a_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ がちょうど 1 つ存在する。 a_n はそれ以前の目と独立に 6 通り等確率で出るので、この場合に b_n が 7 の倍数になる条件付き確率は $\frac{1}{6}$ である。

よって $p_n = 0 \cdot p_{n-1} + \frac{1}{6}(1 - p_{n-1}) = \frac{1 - p_{n-1}}{6}$ である。これを固定値 $\frac{1}{7}$ からのずれで書くと $p_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}(p_{n-1} - \frac{1}{7})$ となる。 $p_1 = 0$ だから

$$p_n - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

である。したがって $p_n = \frac{1}{7} \left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$ を得る。

▶ 解法 2 (該当する出目列の個数を数える方法)

【方針】

確率ではなく、長さ n の出目列のうち $b_n \equiv 0 \pmod{7}$ となる個数 q_n を数える。長さ $n-1$ の列で余りが 0 でない場合に限り、最後の目がちょうど 1 通りに決まるため $q_n = 6^{n-1} - q_{n-1}$ となる。この個数漸化式を解いて全列数 6^n で割る。

【解答】

(1) $b_1 = a_1$ は 7 の倍数にならないので $p_1 = 0$ である。 $b_2 = a_1^2 + a_2$ では、各 a_1 に対し

$$a_2 \equiv -a_1^2 \pmod{7}$$

を満たす $a_2 \in \{1, 2, \dots, 6\}$ がちょうど 1 つある。よって該当列は 6 通りで

$$p_2 = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

である。

(2) q_n を、長さ n の出目列のうち b_n が 7 の倍数となるものの個数とする。定義から

$$b_n = a_1 b_{n-1} + a_n$$

である。

長さ $n-1$ の列で $b_{n-1} \equiv 0 \pmod{7}$ なら、 $b_n \equiv a_n \not\equiv 0 \pmod{7}$ なので、最後の目をどう選んでも該当しない。一方、 $b_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{7}$ なら $a_1 b_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{7}$ であり、 $a_n \equiv -a_1 b_{n-1} \pmod{7}$ を満たす目が 6 種類中ちょうど 1 つある。したがって

$$q_n = 6^{n-1} - q_{n-1}, \quad q_1 = 0.$$

ここで $r_n = q_n - 6^n/7$ とおくと

$$r_n = -r_{n-1}, \quad r_1 = -\frac{6}{7}$$

であるから

$$q_n = \frac{6^n}{7} - \frac{6(-1)^{n-1}}{7}.$$

全出目列は 6^n 通りなので

$$p_n = \frac{q_n}{6^n} = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\}$$

である。

【総評】 剰余を使う確率漸化式の問題。目安時間は 22～26 分。 b_n の式をそのまま扱うと重く見えるが、 $b_n = a_1 b_{n-1} + a_n$ に気づけば、7 で割った余りが 0 か 0 でないかだけの問題になる。 $b_{n-1} \equiv 0$ からは次に 0 へ行けない点と、非零からは 6 通り中ちょうど 1 通りで 0 になる点が採点の中心である。数え上げの別解も、同じ構造を個数で確認できるため検算として有効である。公式出題意図は定義を正確に読み、整数と数列の基本事項を用いて確率を求める力である。確率遷移と列の個数漸化式を別々に立て、同じ一般項に到達することを確認した。