

入 学 試 験 問 題

数 学



大 阪 大 学 2025 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

平面上の三角形 OAB を考える． $\angle AOB$ は鋭角， $OA = 3$ ， $OB = t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし， $OC = 1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P ，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ．
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ．
- (3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき， t のとりうる値の範囲を求めよ．

第 2 問

p と m を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり， $x = \beta$ で極小値をとるとする．

(1) $f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ．

(2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ．

第 3 問

座標空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある. $\angle OAP = 30^\circ$ かつ $y \geq 0$ を満たすように点 P が動くとき, $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ.

第 4 問

次の問いに答えよ.

(1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ.

(2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

を示せ.

(3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$$

を示せ.

第 5 問

投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある．A, B, C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする．

- (1) k を正の整数とするととき， $p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．
- (2) n を正の整数とするととき， p_n を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)