

大阪大学 2025 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上の三角形 OAB を考える． $\angle AOB$ は鋭角， $OA = 3$ ， $OB = t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし， $OC = 1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P ，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

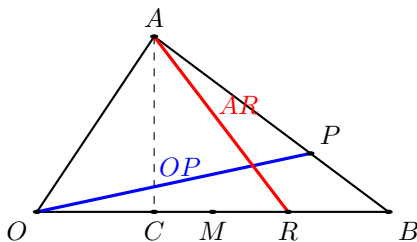
- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を t を用いて表せ．
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ．
- (3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき， t のとりうる値の範囲を求めよ．

【方針】

直線 OB を x 軸に取り， $O = (0, 0)$ ， $B = (t, 0)$ とおく． $\angle AOB$ が鋭角で， A から OB への射影の長さが $OC = 1$ なので， A の x 座標は 1 ， $OA = 3$ から高さは $2\sqrt{2}$ と決まる．(2) では P を内分点公式で出し， $R = (r, 0)$ において $AR \perp OP$ を内積 0 で表す．(3) は R が線分 MB 上にあることを $t/2 \leq r \leq t$ に翻訳し，分母 $2t + 1 > 0$ を確認して 2 つの二次不等式を解く．

【解答】

座標配置の一例として $t = 3$ の場合を描くと次のようになる．青線が OP 、赤線が AR であり、両者は直交する．



(1) 直線 OB を x 軸に取り， $O = (0, 0)$ ， $B = (t, 0)$ とおく． $OB = t$ は長さなので $t > 0$ である．

点 A から直線 OB に下ろした垂線の足が C で， $OC = 1$ である．また $\angle AOB$ は鋭角なので， C は O から B へ向かう向きにある．したがって， A の x 座標は 1 としてよい． $OA = 3$ より， A の y 座標の絶対値は $\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ である．上下どちらにあっても内積や長さの答えは同じなので， $A = (1, 2\sqrt{2})$ として計算する．

このとき $\vec{OA} = (1, 2\sqrt{2})$ ， $\vec{OB} = (t, 0)$ であるから， $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = t$ である．

(2) 点 P は線分 AB を $2:1$ に内分するので， $AP:PB = 2:1$ である．よって $P = \frac{A+2B}{3} = \left(\frac{1+2t}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ である．

R は直線 OB 上にあるから， $R = (r, 0)$ とおく．直線 AR は直線 OP に垂直なので， $\vec{AR} \cdot \vec{OP} = 0$ である．ここで

$$\vec{AR} = (r-1, -2\sqrt{2}), \quad \vec{OP} = \left(\frac{1+2t}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

だから， $(r-1)\frac{1+2t}{3} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$ すなわち $(r-1)(1+2t) - 8 = 0$ である．したがって $r = 1 + \frac{8}{1+2t} = \frac{2t+9}{2t+1}$ である． $t > 0$ より $r > 0$ なので，求める長さは $OR = \frac{2t+9}{2t+1}$ である．

(3) M は OB の中点なので，座標は $M = (t/2, 0)$ である． R が線分 MB 上にあるための条件は $\frac{t}{2} \leq r \leq t$ である．(2) の結果を代入すると $\frac{t}{2} \leq \frac{2t+9}{2t+1} \leq t$ である．ここで $2t+1 > 0$ であるから，分母を払ってよい．

右側の不等式から $\frac{2t+9}{2t+1} \leq t$ すなわち $2t+9 \leq 2t^2+t$ を得る．よって $2t^2-t-9 \geq 0$ であり， $t > 0$ を考えると $t \geq \frac{1+\sqrt{73}}{4}$ である．

左側の不等式から $\frac{t}{2} \leq \frac{2t+9}{2t+1}$ すなわち $t(2t+1) \leq 2(2t+9)$ を得る．よって $2t^2-3t-18 \leq 0$ であり， $t > 0$ を考えると

$$t \leq \frac{3+3\sqrt{17}}{4} \text{ である。}$$

$$\text{以上を合わせて、求める範囲は } \frac{1+\sqrt{73}}{4} \leq t \leq \frac{3+3\sqrt{17}}{4} \text{ である。}$$

【総評】 文系・理系の公式出題意図はいずれも、平面ベクトルの内積などの基本理解、条件を正確に表現する力、着実な計算力を問うとしている。座標化すれば素直に進むベクトル・図形問題。目安時間は18分前後。 $OC=1$ は A の射影の長さを決める条件であり、 $OA=3$ と合わせて $A=(1, 2\sqrt{2})$ と置けることが出発点である。採点上は、内分点 P の座標、 $AR \perp OP$ の内積条件、 R が線分 MB 上にあることを $t/2 \leq r \leq t$ とする翻訳が得点源になる。 $2t+1 > 0$ を確認してから不等式の分母を払うと、符号ミス避けやすい。2つの境界値を再計算し、区間内の複数の t で $t/2 \leq OR \leq t$ を独立検算した。

【第2問】

p と m を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり、 $x = \beta$ で極小値をとるとする。

(1) $f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ。

(2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき、曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ。

▶ 解法1 (三次関数の平行移動)

【方針】

$f'(x)$ を平方完成し、 $d = \sqrt{p^2 - m}$ とおく。極大・極小が存在するには $d > 0$ が必要で、極大点は $x = -p - d$ 、極小点は $x = -p + d$ である。 $X = x + p$ と平行移動すると、三次関数は $X^3 - 3d^2X + \text{定数}$ になり、極値差は $4d^3$ と読める。(2)では $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ から $d = 1$ 、すなわち $m = p^2 - 1$ を得て、変曲点 $x = -p$ の y 座標を計算し、媒介変数 p を消去する。極値差は f' の符号つき面積で求める別解も自然である。

【解答】

(1) まず $f'(x) = 3x^2 + 6px + 3m = 3\{(x+p)^2 - (p^2 - m)\}$ である。 $f(x)$ が極大値と極小値をもつので、 $f'(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもち、 $p^2 - m > 0$ である。そこで $d = \sqrt{p^2 - m}$ とおくと、 $d > 0$ であり、 $f'(x) = 3\{(x+p)^2 - d^2\}$ である。三次関数の増減より、左側の解で極大、右側の解で極小をとるから $\alpha = -p - d$ 、 $\beta = -p + d$ である。

ここで $X = x + p$ とおく。すなわち $x = X - p$ とする。すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (X-p)^3 + 3p(X-p)^2 + 3m(X-p) \\ &= X^3 - 3(p^2 - m)X + 2p^3 - 3mp \\ &= X^3 - 3d^2X + 2p^3 - 3mp. \end{aligned}$$

したがって、 $x = \alpha$ のとき $X = -d$ 、 $x = \beta$ のとき $X = d$ であるから、

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \{(-d)^3 - 3d^2(-d)\} - \{d^3 - 3d^2d\} \\ &= (2d^3) - (-2d^3) \\ &= 4d^3. \end{aligned}$$

よって $f(\alpha) - f(\beta) = 4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}}$ である。

(2) 条件 $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ と(1)より $4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}} = 4$ である。 $p^2 - m > 0$ だから $p^2 - m = 1$ すなわち $m = p^2 - 1$ である。

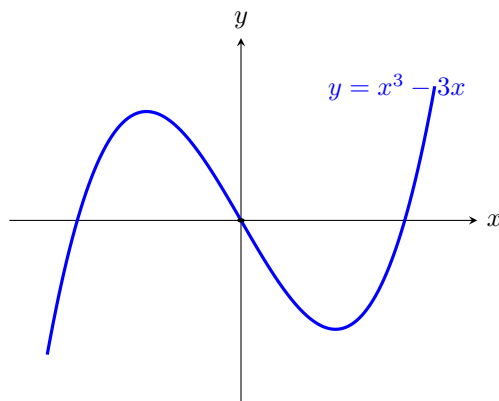
変曲点は $f''(x) = 0$ で求まる。実際、 $f''(x) = 6x + 6p = 6(x + p)$ だから、変曲点の x 座標は $x = -p$ である。そのときの y 座標は

$$\begin{aligned} f(-p) &= (-p)^3 + 3p(-p)^2 + 3m(-p) \\ &= 2p^3 - 3mp. \end{aligned}$$

ここに $m = p^2 - 1$ を代入すると $y = 2p^3 - 3p(p^2 - 1) = -p^3 + 3p$ である。さらに $x = -p$ 、すなわち $p = -x$ であるから $y = x^3 - 3x$ となる。逆に任意の実数 p に対して $m = p^2 - 1$ とすれば条件を満たすので、この曲線上の点はすべて現れる。

したがって、求める軌跡は $y = x^3 - 3x$ である。

変曲点は p が全実数を動くにつれて、次の三次曲線全体を動く。



▶ 解法 2 (導関数の符号つき面積)

【方針】

極大点と極小点の間では $f'(x) < 0$ なので、極値差を

$$- \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx$$

として求める。 $X = x + p$ 、 $d = \sqrt{p^2 - m}$ とおけば被積分関数は左右対称な 2 次式になり、面積計算だけで $4d^3$ が得られる。(2) は $d = 1$ を使い、変曲点を媒介変数 p で表して消去する。

【解答】

(1) $f'(x) = 3\{(x+p)^2 - (p^2 - m)\}$ である。極大値と極小値をともにもつので $p^2 - m > 0$ であり、 $d = \sqrt{p^2 - m} > 0$ とおくと

$$\alpha = -p - d, \quad \beta = -p + d$$

である。区間 $\alpha < x < \beta$ では $f'(x) < 0$ だから

$$f(\alpha) - f(\beta) = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx$$

である。 $X = x + p$ と置換すると

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{-d}^d 3(d^2 - X^2) dX \\ &= 3 \left[d^2 X - \frac{X^3}{3} \right]_{-d}^d \\ &= 4d^3 = 4(p^2 - m)^{3/2}. \end{aligned}$$

(2) 条件より $4d^3 = 4$ であり、 $d > 0$ なので $d = 1$ 、したがって $m = p^2 - 1$ である。変曲点では

$$f''(x) = 6(x + p) = 0$$

だから $x = -p$ である。また

$$y = f(-p) = 2p^3 - 3mp = 2p^3 - 3p(p^2 - 1) = -p^3 + 3p.$$

$p = -x$ を代入すると $y = x^3 - 3x$ を得る。任意の実数 p に対して $m = p^2 - 1$ とできるので、逆にこの曲線上のすべての点が現れる。よって軌跡は $y = x^3 - 3x$ である。

【総評】 公式の出題意図は、三次関数の導関数とグラフの基本事項を用いて的確に論証する力を問うとしている。三次関数を平行移動して標準形で読む問題。目安時間は 16 分前後。 $p^2 - m > 0$ を明記しないと、極大・極小の存在条件が抜ける。採点上は、 $X = x + p$ による平方完成後の形、極大点と極小点の対応、極値差 $4(p^2 - m)^{3/2}$ の導出、変曲点 $x = -p$ での y 座標計算が重要である。別解のように f' の面積で極値差を出す方法もあり、符号を

$$f(\alpha) - f(\beta) = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx$$

と置く点に注意したい。複数の (p, m) で極値差と変曲点を直接代入し、極値差 4 と軌跡 $y = x^3 - 3x$ を再確認した。

【第 3 問】

座標空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある. $\angle OAP = 30^\circ$ かつ $y \geq 0$ を満たすように点 P が動くとき, $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ.

▶ 解法 1 (楕円の 2 枝を 1 変数で調べる)

【方針】

角度条件を内積で表し, $3x^2 + (y+1)^2 = 3$ という楕円に直す. $Y = y+1$ とおけば, $y \geq 0$ から $1 \leq Y \leq \sqrt{3}$ であり, $x = \pm\sqrt{(3-Y^2)/3}$ と書ける. $(x+1)Y$ は $Y > 0$ なので最大は x が正の枝, 最小は x が負の枝で調べる. 各枝で微分して, 最大は内部点 $Y = 3/2$, 最小は負の枝の端 $Y = 1$ で起こることを示す. 別解として, 楕円を $x = \sin \theta$, $Y = \sqrt{3} \cos \theta$ とおいて三角関数なしの 1 変数 $u = \sin \theta$ に直してもよい.

【解答】

$\vec{AO} = (0, -1, -1)$, $\vec{AP} = (x, y-1, -1)$ である. したがって $\vec{AO} \cdot \vec{AP} = 2-y$ であり,

$$|\vec{AO}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{AP}| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}$$

である.

$\angle OAP = 30^\circ$ より $\frac{2-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である. この式を整理する. 両辺を 2 乗して $4(2-y)^2 = 6\{x^2 + (y-1)^2 + 1\}$ となる. これを展開すると $3x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$ すなわち $3x^2 + (y+1)^2 = 3$ である. なお, この式と $y \geq 0$ から $y \leq \sqrt{3} - 1 < 2$ となるので, もとの内積の符号条件 $2-y > 0$ も満たされる.

ここで $Y = y+1$ とおく. $y \geq 0$ より $1 \leq Y \leq \sqrt{3}$ であり, 楕円の式は $3x^2 + Y^2 = 3$ となる. したがって $x = \pm\sqrt{\frac{3-Y^2}{3}}$ である. 求める量は $(x+1)(y+1) = (x+1)Y$ である.

まず最大値を調べる. $Y > 0$ なので, 最大値は x が正の枝で起こる. そこで

$$\Phi(Y) = Y \left(1 + \sqrt{\frac{3-Y^2}{3}} \right) \quad (1 \leq Y \leq \sqrt{3})$$

とおく. $s = \sqrt{3-Y^2}$ と書くと $\Phi(Y) = Y + \frac{Y}{\sqrt{3}}s$ であり,

$$\Phi'(Y) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(s - \frac{Y^2}{s} \right) = 1 + \frac{3-2Y^2}{\sqrt{3}\sqrt{3-Y^2}}$$

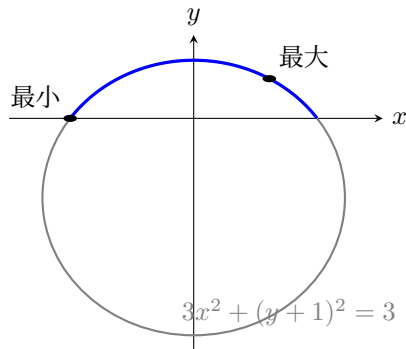
である. $\Phi'(Y) = 0$ とすると $2Y^2 - 3 = \sqrt{3}\sqrt{3-Y^2}$ であり, この範囲で解は $Y = \frac{3}{2}$ である. 実際, $1 < Y < \frac{3}{2}$ で $\Phi'(Y) > 0$, $\frac{3}{2} < Y < \sqrt{3}$ で $\Phi'(Y) < 0$ となるので, ここで最大をとる. このとき $x = \sqrt{\frac{3-(3/2)^2}{3}} = \frac{1}{2}$ であるから, 最大値は $(\frac{1}{2}+1)\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ である.

次に最小値を調べる. $Y > 0$ なので, 最小値は x が負の枝で起こる. そこで $\Psi(Y) = Y \left(1 - \sqrt{\frac{3-Y^2}{3}} \right)$ とおく. 同様に微分すると $\Psi'(Y) = 1 - \frac{3-2Y^2}{\sqrt{3}\sqrt{3-Y^2}}$ である. $1 \leq Y < \sqrt{3}$ では $\sqrt{3}\sqrt{3-Y^2} > 0$ であり, 直接確認すると $\Psi'(Y) > 0$ である. 例えば $\Psi'(Y) > 0 \iff \sqrt{3}\sqrt{3-Y^2} > 3-2Y^2$ であり, 両辺が 0 以下なら明らかで, 両辺が正のときは 2 乗して $3(3-Y^2) > (3-2Y^2)^2$ すなわち $Y^2(9-4Y^2) > 0$ を得る. これは $1 \leq Y < \sqrt{3/2}$ で成り立つ. したがって Ψ は範囲全体で増加し, 最小は $Y = 1$ でとる.

$Y = 1$ のとき $x = -\sqrt{\frac{3-1}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ であるから, 最小値は $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \cdot 1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ である.

以上より, 最大値は $\frac{9}{4}$ 最小値は $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ である.

点 (x, y) は楕円 $3x^2 + (y+1)^2 = 3$ のうち $y \geq 0$ の弧上を動く. 最大・最小を与える点は次の位置にある.



▶ 解法 2 (楕円弧の三角関数表示)

【方針】

内積条件を楕円 $3x^2 + (y+1)^2 = 3$ に直した後、弧全体を $x = \sin \theta$, $y+1 = \sqrt{3} \cos \theta$ と一度に媒介表示する。目的関数の導関数は $(1 + \sin \theta)(1 - 2 \sin \theta)$ に因数分解できるため、最大点と両端の比較が短くなる。

【解答】

$\vec{AO} = (0, -1, -1)$, $\vec{AP} = (x, y-1, -1)$ なので、角度条件を 2 乗して整理すると

$$3x^2 + (y+1)^2 = 3$$

を得る。 $y \geq 0$ のもとでは $2-y > 0$ も成り立つため、2 乗による余分な点はない。

$Y = y+1$ とし、

$$x = \sin \theta, \quad Y = \sqrt{3} \cos \theta$$

とおく。 $1 \leq Y \leq \sqrt{3}$ だから、 $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, $\sin \theta_0 = \sqrt{2/3}$ とできる。求める量は

$$F(\theta) = \sqrt{3}(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

である。微分すると

$$F'(\theta) = \sqrt{3}(1 + \sin \theta)(1 - 2 \sin \theta)$$

となる。この範囲では $1 + \sin \theta > 0$ なので、 F は $\sin \theta = 1/2$ まで増加し、その後減少する。よって最大値は

$$\sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$$

である。

最小値は両端のいずれかでとる。左端では $\sin \theta = -\sqrt{2/3}$, $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ だから $F = 1 - \sqrt{6}/3$ 、右端では $F = 1 + \sqrt{6}/3$ である。したがって最小値は $1 - \sqrt{6}/3$ である。

【総評】 公式の出題意図は、空間図形の条件を適切に表し、その下で最大値・最小値を正確に求める力を問うとしている。空間の角度条件を平面上の楕円に変換して最大・最小を求める問題。目安時間は 22 分前後。内積式を 2 乗する前に、後で $2-y > 0$ が満たされることを確認するのが丁寧である。最大は x 正、最小は x 負の枝で起こるため、ここを一つの式で済ませようとすると符号の扱いが崩れやすい。採点上は、 $3x^2 + (y+1)^2 = 3$ の導出、 $1 \leq Y \leq \sqrt{3}$ の範囲、最大・最小それぞれの増減確認が中心になる。角度条件から得た楕円弧を細分走査し、最大値 $9/4$ と最小値 $1 - \sqrt{6}/3$ を独立検算した。

【第 4 問】

次の問いに答えよ.

(1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ.

(2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

を示せ.

(3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$$

を示せ.

【方針】

(1) は積分そのものではなく絶対値を評価し, $|\sin x| \leq 1$ から

$$\int_t^{2t} x^{-2} dx = 1/(2t)$$

を使う。(2) は $\sin x/x$ を微分した形から部分積分し, 端点項と (1) の積分に分けてどちらも 0 に近づくことを示す。(3) は積和公式で $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x)$ とし, $u = 2x$ の置換で第 2 項の区間を $[2, 2t]$ に直す。あとは $[1, t]$ と $[2, 2t]$ の差を $[1, 2]$ と $[t, 2t]$ に分け, (2) で後者を消す。

【解答】

(1) $t > 0$ とする。 $t \leq x \leq 2t$ では $x > 0$ であり, $|\sin x| \leq 1$ だから

$$\left| \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \right| \leq \int_t^{2t} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \leq \int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx$$

である。右辺は

$$\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_t^{2t} = \frac{1}{2t}$$

であり, $\frac{1}{2t} < \frac{1}{t}$ である。したがって

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つ。

(2) $\frac{\sin x}{x}$ を微分すると $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$ である。よって $\frac{\cos x}{x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + \frac{\sin x}{x^2}$ であり, 積分して

$$\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = \left[\frac{\sin x}{x} \right]_t^{2t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

を得る。

第 1 項は

$$\left| \left[\frac{\sin x}{x} \right]_t^{2t} \right| = \left| \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} \right| \leq \frac{1}{2t} + \frac{1}{t}$$

なので $t \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。第 2 項も (1) より絶対値が $1/t$ 未満であるから 0 に近づく。したがって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

である。

(3) 積和公式より $f(x) = \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x)$ である。したがって

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx$$

である。

第 2 項で $u = 2x$ とおくと, $du = 2dx$, $x = u/2$ だから

$$\int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx = \int_2^{2t} \frac{\cos u}{u} du$$

である。よって, $t > 2$ として整理すると

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx - \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \right). \end{aligned}$$

(2) より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

であるから, 両辺の極限を取って

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$$

を得る。

【総評】 公式の出題意図は、三角関数と積分の性質による変形、不等式による極限の論証を問うとしている。小問の誘導を順に使う積分評価問題。目安時間は 22 分前後。(1) は絶対値評価で十分で、値を求めようとしなくてもよい。(2) は $\sin x/x$ の微分を見つけると、端点項と (1) の形に分かれる。(3) では積和公式と置換で区間をそろえるところが山場で、 $[1, t]$ と $[2, 2t]$ の差を $[1, 2]$ と $[t, 2t]$ に分解できれば、最後は (2) をそのまま使える。極限を扱うため、途中で $t > 2$ としてよいことも自然に書いておきたい。複数の t で数値積分し、(1) の評価、(2) の収束、(3) の極限値を独立検算した。

【第 5 問】

投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。A, B, C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して、コインを投げて次の操作を行う。

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる。
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる。

例えば、文字列が BAC であるときに、2 回続けてコインを投げて表、裏の順に出たとすると、文字列は BAC から ABC を経て ACB となる。

最初の文字列は ABC であるとする。コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし、BCA である確率を q_n とする。

- (1) k を正の整数とすると、 $p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ。
- (2) n を正の整数とすると、 p_n を求めよ。

【方針】

1 回の操作は隣接する 2 文字の交換なので、文字列の偶奇が毎回入れ替わる。したがって偶数回後だけを見れば、可能な文字列は偶置換の ABC, BCA, CAB の 3 つである。2 回の操作を 1 単位にして、表表・裏裏なら同じ文字列に戻り、表裏・裏表なら残り 2 つのどちらかに移ることを確認する。これにより $p_{2k} - q_{2k}$ は 2 回ごとに $1/4$ 倍される。また対称性から偶数回後の BCA と CAB の確率は等しいので、 $p_{2k} + 2q_{2k} = 1$ と合わせて p_{2k} を求める。奇数回後は偶奇が違うため ABC には戻れない。

【解答】

(1) 1 回の操作は、左から 1 文字目と 2 文字目、または 2 文字目と 3 文字目を入れかえる操作である。いずれも隣り合う 2 文字の交換なので、文字列の偶奇は 1 回ごとに変わる。最初の ABC は偶数回の交換後には ABC, BCA, CAB のいずれかになり、奇数回の交換後には残り 3 つの文字列になる。

偶数回後の 3 つの文字列だけを考え、さらに 2 回操作する。どの文字列から始めても、2 回の結果が「表、表」または「裏、裏」であれば同じ隣接交換を 2 回行うので、もとの文字列に戻る。これは確率 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ で起こる。一方、「表、裏」と「裏、表」の 2 通りでは、残り 2 つの偶数回後の文字列にそれぞれ移る。したがって、2 回を 1 単位として見たとき、同じ文字列にとどまる確率は $\frac{1}{2}$ 、他の 2 つへ移る確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$ である。

$2k$ 回後に ABC, BCA, CAB である確率をそれぞれ p_{2k}, q_{2k}, r_{2k} とおく。上の 2 回ごとの移り方より $p_{2k+2} = \frac{1}{2}p_{2k} + \frac{1}{4}q_{2k} + \frac{1}{4}r_{2k}$ であり、 $q_{2k+2} = \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{2}q_{2k} + \frac{1}{4}r_{2k}$ である。したがって差を取ると $p_{2k+2} - q_{2k+2} = \frac{1}{4}(p_{2k} - q_{2k})$ となる。

最初は $p_0 = 1, q_0 = 0$ であるから $p_0 - q_0 = 1$ である。よって、 k を正の整数とすると $p_{2k} - q_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$ である。

(2) 偶数回後には ABC, BCA, CAB のいずれかであり、その確率の和は 1 である。また、 BCA と CAB は左右対称な役割をもち、最初はどちらも確率 0、2 回ごとの移り方でも同じように扱われるので $\Pr(BCA) = \Pr(CAB) = q_{2k}$ である。したがって $p_{2k} + 2q_{2k} = 1$ である。

(1) の $p_{2k} - q_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$ と合わせると、 $3p_{2k} = 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^k$ であるから $p_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ を得る。

一方、奇数回後は奇数回の交換を行った後なので、偶数回の交換で得られる ABC にはならない。したがって $p_{2k-1} = 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) である。

以上より、正の整数 n に対して

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k & (n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

である。

【総評】 公式の出題意図は、確率の基本性質から漸化式を導く論証力と、一般項を求める力を問うとしている。隣接交換の確率を 2 回単位で圧縮する問題。目安時間は 22 分前後。6 つの文字列をすべて追うこともできるが、偶数回後は ABC, BCA, CAB の 3 つだけに限られることを使うと大幅に整理できる。採点上は、2 回操作で同じ状態に戻る確率が $1/2$ 、他の 2 状態へ移る確率が各 $1/4$ であること、差 $p_{2k} - q_{2k}$ が $1/4$ 倍されること、 BCA と CAB の確率が等しいことを明記したい。奇数回で $p_n = 0$ になる理由は、交換回数の偶奇で説明すると簡潔で誤りにくい。 $1 \leq n \leq 12$ の全 2^n 通りを独立列挙し、 p_n, q_n と導出した式がすべて一致した。