

上智大学 2012 年度 経済学科数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 三角形 OAB に対し $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $s, t \geq 0$ とする。三角形 OAB の面積を S とする。(i) $1 \leq s+t \leq 3$ のとき, 点 P の領域の面積を S で表せ。(ii) $1 \leq s+2t \leq 3$ のときも同様に求めよ。

(2) $k \geq 2$ を整数とし

$$\left(\sqrt{2}x + \sqrt[k]{2}\right)^{100}$$

を展開する。(i) x^{100} の係数を 2 の累乗で表せ。(ii) $0 \leq n \leq 100$ で x^n の係数が整数となる n の個数を, $k = 2, 3, 5, 7, 51$ について求めよ。

【方針】

(1) $s+t$ を倍率とみて相似な三角形の差を取る。(ii) $u = 2t$ と置くと基底ベクトルの張る三角形の面積が半分になる。(2) 一般項の 2 の指数が整数となる合同条件を n について数える。

【解答】

(1)(i) $s+t=r$ を固定すると点は線分上を動く。 $1 \leq r \leq 3$ の領域は相似な三角形 2 つの差なので $(3^2 - 1^2)S = 8S$ 。

(1)(ii) $u = 2t$ とおく。 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}/2$ とすれば同じ形であり, $[\triangle OAC] = S/2$ 。よって面積は $8(S/2) = 4S$ 。

(2)(i) x^{100} の係数は $(\sqrt{2})^{100} = 2^{50}$ 。

(2)(ii) x^n の係数に含まれる 2 の指数は

$$\frac{n}{2} + \frac{100-n}{k}.$$

これが整数となる n を数えると, $k = 2, 3, 5, 7, 51$ の順に 101, 17, 11, 8, 1 個。

【第 2 問】

領域 D を

$$\log_2(2y+1) - 1 \leq \log_2 x \leq 2 + \log_2 y \leq \log_2 x + \log_2(4-2x)$$

で定める。

(1) D を通常的不等式で表せ。(2) D の面積を求めよ。(3) $s < 1$ とし, $(x, y) \in D$ における $y - sx$ の最大値を $f(s)$ とする。 $f(s)$ を求めよ。

【方針】

真数条件を確認してから, 底が 2 であることを使って対数不等式を代数的不等式へ変える。境界の交点で区間を分けて面積を積分する。 $y = sx + k$ を上へ動かし, 接点または端点で最大切片を求める。

【解答】

(1) 真数条件のもとで同値変形すると

$$x \leq 4y \leq -2x^2 + 4x, \quad y \leq x - \frac{1}{2}.$$

これらが領域 D を定める。

(2) 境界の交点 $x = 1/2, 2/3, 1, 3/2$ で区間を分けて上下の差を積分すると, 面積は $11/96$ 。

(3) 傾き s の直線の最大切片を調べると

$$f(s) = \begin{cases} -s + \frac{1}{2}, & 0 \leq s < 1, \\ \frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq s < 0, \\ -\frac{3}{2}s + \frac{3}{8}, & s < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

【第 3 問】

3 行 3 列のマスに上から順に 1~9 と番号をつける。A は上段から出発して 1 段ずつ下へ、B は下段から 1 段ずつ上へ 2 回動く。出発点は各 3 マスから一様に選び、次の段では同じ列または隣の列の行けるマスから一様に選ぶ。A と B の移動は独立である。

(1) A の経路数、最小確率の経路数とその確率を求めよ。(2) A と B がともに奇数番号のマスだけを通る確率を求めよ。(3) A と B が中段で同じマスを通る確率を求めよ。

(4) $(2n+1)$ 行 $(2n+1)$ 列の場合、同じ規則で移動する。A と B の通過マスを合わせると 2 本の対角線上の全マスになる確率を $1/(p^2 3^q)$ と表す。 p, q を求めよ。

【方針】

各出発点から中段・下段への分岐数を掛けて経路を数える。特定マスを通る確率は経路ごとの確率を足し、A と B の独立性を使う。一般の場合は両端から対角線に沿う 2 種類の配置を対称性で数える。

【解答】

(1) 経路数は $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 17$ 。最小確率は中央列から中央マスを経る 3 経路で、各 $1/27$ 。

(2) A が奇数マスだけを通る確率は $2/9$ 。B も同じで独立だから $(2/9)^2 = 4/81$ 。

(3) 中段の 4, 5, 6 で一致する確率をそれぞれ足すと $25/324 + 16/81 + 25/324 = 19/54$ 。

(4) 両端の選び方と各途中段で対角方向を選び続ける確率を数えると

$$\frac{1}{(2n+1)^2 3^{4n-2}}.$$

したがって $p = 2n+1$, $q = 4n-2$ 。