

上智大学 2012 年度 経営学科数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1)

$$f(x) = \log_4(32x) - \log_8(64x) + \log_{16}(8x)$$

とする。 $5 \leq f(x) \leq 10$ となる x の範囲を 2 の累乗で表せ。

(2) $g(x) = 4 \cos^2(x/2) + 2 \sin^2(x/2) + \sqrt{3} \sin x$ とする。 $0 \leq x < 2\pi$ で最大値をとる x を求めよ。

(3) $m \geq n$ を正の整数とする。3 辺 $m+1, m, n$ の和が 100 以下である直角三角形の個数を求め、面積が最大のものの斜辺長を求めよ。

【方針】

(1) すべて底 2 の対数に直す。(2) 半角公式で $A \cos x + B \sin x + C$ にし、三角関数を合成する。(3) 最大辺 $m+1$ を斜辺として三平方の定理を整理し、整数条件と周長条件を満たす n を列挙する。

【解答】

(1) 整理すると $f(x) = 5/4 + (5/12) \log_2 x$ 。したがって $5 \leq f(x) \leq 10$ は $9 \leq \log_2 x \leq 21$ と同値で、 $2^9 \leq x \leq 2^{21}$ 。

(2) 半角公式から $g(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x + 3 = 2 \sin(x + \pi/6) + 3$ 。よって最大となるのは $x = \pi/3$ 。

(3) 三平方の定理から $(m+1)^2 = m^2 + n^2$ 、よって $2m+1 = n^2$ 。周長条件を満たす組は $(m, n) = (4, 3), (12, 5), (24, 7), (40, 9)$ の 4 個。面積最大は $n = 9, m = 40$ で、斜辺長は 41。

【第 2 問】

直線 $y = x - 1$ 上の点 $A(a, a - 1)$ を通り、放物線 $y = x^2$ に接する 2 直線を ℓ, m とする。 ℓ の方が傾きが大きい。

(1) ℓ の傾きを a で表せ。(2) 2 接点を P, Q とする。線分 PQ と放物線で囲まれる面積 S を a で表し、最小値とそのときの a を求めよ。(3) 放物線上で直線 $y = x - 1$ との距離が最小の点と、その距離を求めよ。

【方針】

点 A を通る傾き k の直線と放物線を連立し、判別式 0 から 2 本の接線の傾きを求める。接点の x 座標の差を使って面積を表し、平方完成する。最短点では放物線の接線が与えられた直線と平行になる。

【解答】

(1) 接線の傾き k は $k^2 - 4ak + 4a - 4 = 0$ を満たす。大きい方は $2\{a + \sqrt{a^2 - a + 1}\}$ 。

(2) 接点の x 座標差は $2\sqrt{a^2 - a + 1}$ だから

$$S = \frac{4}{3}(a^2 - a + 1)^{3/2}.$$

$a^2 - a + 1 = (a - 1/2)^2 + 3/4$ より、 $a = 1/2$ のとき最小値 $\sqrt{3}/2$ 。

(3) 接線の傾きが 1 となる点は $2x = 1$ より $(1/2, 1/4)$ 。点と直線の距離公式から最短距離は $3\sqrt{2}/8$ 。

【第 3 問】

同じ大きさの N 個の正方形を左端から詰め、高さ 3 段までに並べる。各段の個数は 1 つ下の段の個数以下とする。

(1) 並べ方の数を $N = 5, 6, 7$ について求めよ。(2) 高さ 2 段までの並べ方を, N の偶奇ごとに求めよ。

(3) $N = 6n$ とする。3 段目が m 個である並べ方を a_m 通りとする。 m の偶奇ごとに a_m を求め、高さ 3 段までの並べ方の総数を求めよ。

【方針】

各段の個数を下から r, s, t として $r \geq s \geq t \geq 0$, $r + s + t = N$ を数える。2 段では下段の個数の範囲を求める。3 段では $t = m$ を固定し、残り 2 段の分け方を偶奇別に数えて和を取る。

【解答】

(1) 直接列挙すると $N = 5, 6, 7$ の順に 5, 7, 8 通り。

(2) N が偶数なら $N/2 + 1$ 通り、奇数なら $(N + 1)/2$ 通り。

(3) $0 \leq m \leq 2n$ で、

$$a_m = \begin{cases} 3n - \frac{3}{2}m + 1, & m \text{ が偶数,} \\ 3n - \frac{3}{2}m + \frac{1}{2}, & m \text{ が奇数.} \end{cases}$$

偶数 m と奇数 m に分けて和を取ると、総数は $3n^2 + 3n + 1$ 通り。