

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2012 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) 関数

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2} - \sin x + a \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

の最小値が $\sqrt{3}$ である。このとき、 a の値と、 $f(x)$ が最小となる x を求めよ。

(2) n を 5 以上の自然数とする。1 以上 n 以下の自然数から互いに隣り合わない 2 つを選ぶ組合せの総数、およびどの 2 つも隣り合わない 3 つを選ぶ組合せの総数を求めよ。

(3) 三角形 OAB において、辺 OA を $1:3$ に内分する点を C 、辺 OB を $4:3$ に内分する点を D 、線分 AD と BC の交点を P とする。 $AP:PD = s:(1-s)$ 、 $BP:PC = t:(1-t)$ とするとき、 s, t を求めよ。また、 OP の延長と辺 AB との交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ で表せ。

第 2 問

a を実数とし，放物線 $C : y = x^2 - 2ax + 4a$ を考える。

- (1) C が直線 $y = -6x$ と接するとき， a の値を求めよ。
- (2) a がすべての実数を動くとき， C の頂点の軌跡の方程式を求めよ。
- (3) C が点 (x, y) を通るような a が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (4) 点 $(3, -1)$ を通る C の接線が存在するための必要十分条件を求めよ。

第 3 問

一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。底面 ABC の内接円の半径を r とおき、頂点 O を通り底面 ABC に垂直な直線からの距離が r 以下である点全体からなる円柱を T とする。

(1) r を求めよ。

(2) 正四面体 $OABC$ の高さを求めよ。

(3) 辺 AB の中点と頂点 O を結ぶ線分上に点 P をとり、 $x = OP$ とおく。 P を通り底面 ABC に平行な平面による側面 OAB の切り口を L とする。 L が T に含まれるような x の最大値を x_1 とするとき、 x_1 を求めよ。また、 $x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さを x で表せ。さらに、正四面体 $OABC$ の表面で T に含まれる部分の面積を求めよ。

第 4 問

$\log x$ は自然対数を表し、 e は自然対数の底を表す。

(1) a, b は $-1 < a < 1$, $b > 0$ を満たす実数とする。曲線 $C: y = \log x$ と直線 $\ell: y = ax + b$ が接しているとするとき、 b を a で表せ。また、曲線 C と 3 つの直線 $x = 1$, $x = e$, ℓ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とすると、 a が $e^{-1} < a < 1$ の範囲を動くときの $S(a)$ の最小値を求めよ。

(2) k を正の定数とし、 $e^{-k} < t < 1$ である t に対して

$$f(t) = \int_0^k |e^{x-k} - t| dx$$

とおく。 t が $e^{-k} < t < 1$ の範囲を動くときの関数 $f(t)$ の最小値を $M(k)$ とおくと、 $M(k)$ を求め、さらに

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2}$$

を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)