

上智大学 2012 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 関数

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + a \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

の最小値が $\sqrt{3}$ である。このとき、 a の値と、 $f(x)$ が最小となる x を求めよ。

(2) n を 5 以上の自然数とする。1 以上 n 以下の自然数から互いに隣り合わない 2 つを選ぶ組合せの総数、およびどの 2 つも隣り合わない 3 つを選ぶ組合せの総数を求めよ。

(3) 三角形 OAB において、辺 OA を $1:3$ に内分する点を C 、辺 OB を $4:3$ に内分する点を D 、線分 AD と BC の交点を P とする。 $AP:PD = s:(1-s)$ 、 $BP:PC = t:(1-t)$ とするとき、 s, t を求めよ。また、 OP の延長と辺 AB との交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ で表せ。

【方針】

(1) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ を用いて $\cos x, \sin x$ の一次式に直し、合成して最小値を調べる。(2) 隣り合わない条件は、選ぶ数の間に少なくとも 1 個の未選択があることに対応させて数える。(3) 座標を置いて交点を求め、比をそのまま読む。最後に OP と OQ の比を確認する。

【解答】

(1)

$$2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x = \sqrt{3}(1 - \cos x) - \sin x = \sqrt{3} - (\sqrt{3}\cos x + \sin x)$$

である。ここで $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ より $f(x) = a + \sqrt{3} - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ と書ける。 $0 \leq x \leq \pi$ では $x = \frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ は最大値 1 をとるから、 $\min f(x) = a + \sqrt{3} - 2$ 。これが $\sqrt{3}$ に等しいので $a = 2$ である。また、最小となるのは $x = \frac{\pi}{6}$ である。

(2) 隣り合う 2 つの組は $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ の $n-1$ 通りである。よって、隣り合わない 2 つの組合せの総数は $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ である。

次に、 $1 \leq a < b < c \leq n$ がどの 2 つも隣り合わないとすると $b \geq a+2$, $c \geq b+2$ である。そこで $a' = a$, $b' = b-1$, $c' = c-2$ とおくと $1 \leq a' < b' < c' \leq n-2$ が任意に対応する。したがって個数は $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$ である。

(3) O を原点、 $A = \mathbf{a}$, $B = \mathbf{b}$ とおくと $C = \frac{1}{4}\mathbf{a}$, $D = \frac{4}{7}\mathbf{b}$ である。点 P を $P = (1-u)A + uD$ とおくと $P = (1-u)\mathbf{a} + \frac{4u}{7}\mathbf{b}$ である。また $P = vB + (1-v)C$ とおくと $P = \frac{1-v}{4}\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ である。係数を比較して $1-u = \frac{1-v}{4}$, $\frac{4u}{7} = v$ を得る。これを解くと $u = \frac{7}{8}$, $v = \frac{1}{2}$ である。したがって $AP:PD = \frac{7}{8}:\frac{1}{8} = 7:1$ より $s = \frac{7}{8}$ 、また $BP:PC = \frac{1}{2}:\frac{1}{2} = 1:1$ より $t = \frac{1}{2}$ である。

さらに $P = \frac{1}{8}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ である。直線 OP 上の点は λP と書け、これが直線 AB 上にあるためには係数の和が 1 になればよいから $\lambda\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = 1$ すなわち $\lambda = \frac{8}{5}$ である。ゆえに $\overrightarrow{OQ} = \frac{8}{5}\overrightarrow{OP}$ である。

【第 2 問】

a を実数とし、放物線 $C: y = x^2 - 2ax + 4a$ を考える。

- (1) C が直線 $y = -6x$ と接するとき、 a の値を求めよ。
- (2) a がすべての実数を動くとき、 C の頂点の軌跡の方程式を求めよ。
- (3) C が点 (x, y) を通るような a が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (4) 点 $(3, -1)$ を通る C の接線が存在するための必要十分条件を求めよ。

【方針】

(1) 接する条件は重解条件として判別式を 0 にする。(2) 頂点座標を a で表し、 a を消去する。(3) a を未知数として存在条件を整理する。(4) 接点を文字で置いて接線方程式を作り、通過条件を a の条件に直す。

【解答】

(1) 直線 $y = -6x$ と放物線 $C: y = x^2 - 2ax + 4a$ が接するためには、連立して得られる二次方程式が重解をもてばよい。 $x^2 - 2ax + 4a = -6x$ より $x^2 + (6 - 2a)x + 4a = 0$ 。判別式を D とすると $D = (6 - 2a)^2 - 16a = 4(a^2 - 10a + 9)$ である。接するから $D = 0$ なので $a^2 - 10a + 9 = 0$ ($a - 1$)($a - 9$) = 0 より $a = 1, 9$ である。

(2) 放物線 C の頂点は $x = a$ のときで、その y 座標は $a^2 - 2a \cdot a + 4a = 4a - a^2$ である。よって頂点は $(a, 4a - a^2)$ であり、 $a = x$ と消去して $y = 4x - x^2$ を得る。したがって軌跡の方程式は $y = -x^2 + 4x$ である。

(3) 点 (x, y) を C が通るためには、ある実数 a が存在して $y = x^2 - 2ax + 4a$ を満たせばよい。これを a について整理すると $y - x^2 = 2a(2 - x)$ である。

$x \neq 2$ のときは $a = \frac{y - x^2}{2(2 - x)}$ と一意に定まり、そのような実数 a が存在する。 $x = 2$ のときは左辺が 0 でなければならないから $y = 4$ である。

したがって必要十分条件は $(x \neq 2)$ または $(y = 4)$ である。言い換えると、 $x = 2$ のときに限り $y = 4$ を要する。

(4) 放物線 C の $x = t$ における接線を考える。 C の導関数は $y' = 2x - 2a$ だから、接点 $x = t$ における傾きは $2t - 2a$ である。したがって接線は $y - (t^2 - 2at + 4a) = (2t - 2a)(x - t)$ となり、整理すると $y = (2t - 2a)x - t^2 + 4a$ である。この接線が点 $(3, -1)$ を通るためには $-1 = 3(2t - 2a) - t^2 + 4a$ すなわち $2a = 6t - t^2 + 1$ である。右辺は $2a = 10 - (t - 3)^2$ と書けるから $a = 5 - \frac{(t - 3)^2}{2}$ である。よって $a \leq 5$ が必要である。また、 $a \leq 5$ なら $(t - 3)^2 = 2(5 - a)$ を満たす実数 t が存在するので接線が引ける。

したがって必要十分条件は $a \leq 5$ である。

【第 3 問】

一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。底面 ABC の内接円の半径を r とおき、頂点 O を通り底面 ABC に垂直な直線からの距離が r 以下である点全体からなる円柱を T とする。

- (1) r を求めよ。
- (2) 正四面体 $OABC$ の高さを求めよ。
- (3) 辺 AB の中点と頂点 O を結ぶ線分上に点 P をとり、 $x = OP$ とおく。 P を通り底面 ABC に平行な平面による側面 OAB の切り口を L とする。 L が T に含まれるような x の最大値を x_1 とするとき、 x_1 を求めよ。また、 $x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さを x で表せ。さらに、正四面体 $OABC$ の表面で T に含まれる部分の面積を求めよ。

【方針】

(1) 底面は正三角形なので内接円半径の公式を使う。(2) 正四面体の高さは、底面の重心と頂点を結ぶ線分で三平方により求める。(3) 座標を置き、側面の切り口の長さや円柱条件を不等式で比較する。最後に 3 つの側面と底面の寄与を足す。

【解答】

(1) 底面 ABC は一辺 1 の正三角形であるから、その内接円の半径は $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ である。

(2) 正四面体の底面 ABC の重心を G とすると、 OG は底面に垂直である。正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、重心から頂点までの距離はその $\frac{2}{3}$ 倍より $\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。よって三平方の定理から、 $\triangle OGA$ において $OA^2 = OG^2 + GA^2$ より

$1 = OG^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ となる。したがって $OG^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、正四面体の高さは $\frac{\sqrt{6}}{3}$ である。

(3) 底面を $z = 0$ 平面に、円柱 T の軸を z 軸にとる。例えば

$$O = (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}), \quad A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), \quad B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), \quad C = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

とおくと、 AB の中点を M として $M = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ であり、 $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

P を OM 上にとり $x = OP$ とすると、 P を通る底面に平行な平面で切った側面 OAB の切り口 L は AB に平行な線分で、その長さは相似より $\frac{2x}{\sqrt{3}}$ である。これが円柱 T にすべて含まれる条件は、端点が軸からの距離 r 以下であることだから、

$\frac{2x}{\sqrt{3}} \leq 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$ に等しい。 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ を代入して整理すると $x \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ となる。したがって $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ である。

次に $x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さは $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$ である。

側面 OAB 上で T に含まれる部分の面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}/4} \frac{2x}{\sqrt{3}} dx + \int_{\sqrt{3}/4}^{\sqrt{3}/2} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4} - x^2} dx$$

である。計算すると $\frac{\pi}{12}$ となる。3つの側面は合同なので、側面全体での面積は $\frac{\pi}{4}$ である。

また、底面 ABC で T に含まれる部分は半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ の円であり、その面積は $\pi r^2 = \frac{\pi}{12}$ である。したがって、正四面体 $OABC$ の表面で T に含まれる部分の面積は $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ である。

【第4問】

$\log x$ は自然対数を表し、 e は自然対数の底を表す。

(1) a, b は $-1 < a < 1$, $b > 0$ を満たす実数とする。曲線 $C: y = \log x$ と直線 $\ell: y = ax + b$ が接しているとき、 b を a で表せ。また、曲線 C と3つの直線 $x = 1$, $x = e$, ℓ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とすると、 a が $e^{-1} < a < 1$ の範囲を動くときの $S(a)$ の最小値を求めよ。

(2) k を正の定数とし、 $e^{-k} < t < 1$ である t に対して

$$f(t) = \int_0^k |e^{x-k} - t| dx$$

とおく。 t が $e^{-k} < t < 1$ の範囲を動くときの関数 $f(t)$ の最小値を $M(k)$ とおくと、 $M(k)$ を求め、さらに

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2}$$

を求めよ。

【方針】

(1) 接線条件は接点の傾き一致から求める。面積は差を積分して a で微分し、最小化する。(2) 絶対値の符号が変わる点で積分を分け、最小値は分岐点が区間の中央にくるときに達成される。

【解答】

(1) 接点の x 座標を x_0 とすると、 $\log x$ の導関数は $1/x$ だから、接線の傾きより $a = \frac{1}{x_0}$ である。よって $x_0 = \frac{1}{a}$ である。接点では $b = \log x_0 - ax_0$ だから $b = \log \frac{1}{a} - 1 = -\log a - 1$ である。

次に、 $a \in (e^{-1}, 1)$ なので $1/a \in (1, e)$ であり、直線 ℓ は区間 $[1, e]$ の内部で曲線 $y = \log x$ に接する。したがって、求める面積は

$$S(a) = \int_1^e (ax + b - \log x) dx$$

である。ここに $b = -\log a - 1$ を代入すると

$$S(a) = \int_1^e (ax - \log a - 1 - \log x) dx$$

となる。

$$\int_1^e x \, dx = \frac{e^2 - 1}{2}, \quad \int_1^e \log x \, dx = 1$$

より $S(a) = \frac{e^2 - 1}{2}a - (e - 1)(\log a + 1) - 1$ である。これを a で微分すると $S'(a) = \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{e - 1}{a}$ であるから、極値は $a = \frac{2}{e + 1}$ で与えられる。これは $e^{-1} < a < 1$ を満たす。このとき $S\left(\frac{2}{e + 1}\right) = (e - 1)\log \frac{e + 1}{2} - 1$ である。したがって、最小値は $(e - 1)\log \frac{e + 1}{2} - 1$ である。

(2) $g(x) = e^{x-k}$ とおくと、 g は $[0, k]$ 上で単調増加し、値域は $[e^{-k}, 1]$ である。

$$f(t) = \int_0^k |g(x) - t| \, dx$$

の最小値は、 $g(x) = t$ となる点が区間の中央にくるときに達成される。したがって $t = e^{-k/2}$ である。

このとき

$$M(k) = \int_0^{k/2} (e^{-k/2} - e^{x-k}) \, dx + \int_{k/2}^k (e^{x-k} - e^{-k/2}) \, dx$$

である。計算すると $M(k) = 1 + e^{-k} - 2e^{-k/2} = (1 - e^{-k/2})^2$ となる。

さらに、 $k \rightarrow +0$ のとき $e^{-k/2} = 1 - \frac{k}{2} + O(k^2)$ だから $M(k) = (1 - e^{-k/2})^2 = \frac{k^2}{4} + O(k^3)$ である。よって

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2} = \frac{1}{4}$$

である。