

上智大学 2012 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 関数

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + a \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

の最小値が $\sqrt{3}$ である。このとき、 a の値と、 $f(x)$ が最小となる x を求めよ。

(2) n を 5 以上の自然数とする。1 以上 n 以下の自然数から互いに隣り合わない 2 つを選ぶ組合せの総数、およびどの 2 つも隣り合わない 3 つを選ぶ組合せの総数を求めよ。

(3) 三角形 OAB において、辺 OA を $1:3$ に内分する点を C 、辺 OB を $4:3$ に内分する点を D 、線分 AD と BC の交点を P とする。 $AP:PD = s:(1-s)$ 、 $BP:PC = t:(1-t)$ とするとき、 s, t を求めよ。また、 OP の延長と辺 AB との交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ で表せ。

【方針】

(1) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ を用いて $\cos x, \sin x$ の一次式に直し、合成して最小値を調べる。(2) 隣り合わない条件は、選ぶ数の間に少なくとも 1 個の未選択があることに対応させて数える。(3) 座標を置いて交点を求め、比をそのまま読む。最後に OP と OQ の比を確認する。

【解答】

(1)

$$2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x = \sqrt{3}(1 - \cos x) - \sin x = \sqrt{3} - (\sqrt{3}\cos x + \sin x)$$

である。ここで $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ より $f(x) = a + \sqrt{3} - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ と書ける。 $0 \leq x \leq \pi$ では $x = \frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ は最大値 1 をとるから、 $\min f(x) = a + \sqrt{3} - 2$ 。これが $\sqrt{3}$ に等しいので $a = 2$ である。また、最小となるのは $x = \frac{\pi}{6}$ である。

(2) 隣り合う 2 つの組は $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ の $n-1$ 通りである。よって、隣り合わない 2 つの組合せの総数は $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ である。

次に、 $1 \leq a < b < c \leq n$ がどの 2 つも隣り合わないとすると $b \geq a+2$, $c \geq b+2$ である。そこで $a' = a$, $b' = b-1$, $c' = c-2$ とおくと $1 \leq a' < b' < c' \leq n-2$ が任意に対応する。したがって個数は $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$ である。

(3) O を原点、 $A = \mathbf{a}$, $B = \mathbf{b}$ とおくと $C = \frac{1}{4}\mathbf{a}$, $D = \frac{4}{7}\mathbf{b}$ である。点 P を $P = (1-u)A + uD$ とおくと $P = (1-u)\mathbf{a} + \frac{4u}{7}\mathbf{b}$ である。また $P = vB + (1-v)C$ とおくと $P = \frac{1-v}{4}\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ である。係数を比較して $1-u = \frac{1-v}{4}$, $\frac{4u}{7} = v$ を得る。これを解くと $u = \frac{7}{8}$, $v = \frac{1}{2}$ である。したがって $AP:PD = \frac{7}{8}:\frac{1}{8} = 7:1$ より $s = \frac{7}{8}$ 、また $BP:PC = \frac{1}{2}:\frac{1}{2} = 1:1$ より $t = \frac{1}{2}$ である。

さらに $P = \frac{1}{8}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ である。直線 OP 上の点は λP と書け、これが直線 AB 上にあるためには係数の和が 1 になればよいから $\lambda\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = 1$ すなわち $\lambda = \frac{8}{5}$ である。ゆえに $\overrightarrow{OQ} = \frac{8}{5}\overrightarrow{OP}$ である。

【総評】 (1) は $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ の合成で最小値を一発で出せるかが確認点である。 x の範囲内で最大値が $x = \pi/6$ に達することも合わせて照合した。(2) は 2 個と 3 個で別々に数え上げ、3 個の場合のずらし方で終端の $n-2$ を落としていないかを確認した。(3) は比の逆比を誤りやすいので、座標係数を直接比較して s, t と $OQ:OP$ を独立に検算した。

【第 2 問】

a を実数とし、放物線 $C: y = x^2 - 2ax + 4a$ を考える。

- (1) C が直線 $y = -6x$ と接するとき、 a の値を求めよ。
- (2) a がすべての実数を動くとき、 C の頂点の軌跡の方程式を求めよ。
- (3) C が点 (x, y) を通るような a が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (4) 点 $(3, -1)$ を通る C の接線が存在するための必要十分条件を求めよ。

【方針】

(1) 接する条件は重解条件として判別式を 0 にする。(2) 頂点座標を a で表し、 a を消去する。(3) a を未知数として存在条件を整理する。(4) 接点を文字で置いて接線方程式を作り、通過条件を a の条件に直す。

【解答】

(1) 直線 $y = -6x$ と放物線 $C: y = x^2 - 2ax + 4a$ が接するためには、連立して得られる二次方程式が重解をもてばよい。 $x^2 - 2ax + 4a = -6x$ より $x^2 + (6 - 2a)x + 4a = 0$. 判別式を D とすると $D = (6 - 2a)^2 - 16a = 4(a^2 - 10a + 9)$ である。接するから $D = 0$ なので $a^2 - 10a + 9 = 0$ $(a - 1)(a - 9) = 0$ より $a = 1, 9$ である。

(2) 放物線 C の頂点は $x = a$ のときで、その y 座標は $a^2 - 2a \cdot a + 4a = 4a - a^2$ である。よって頂点は $(a, 4a - a^2)$ であり、 $a = x$ と消去して $y = 4x - x^2$ を得る。したがって軌跡の方程式は $y = -x^2 + 4x$ である。

(3) 点 (x, y) を C が通るためには、ある実数 a が存在して $y = x^2 - 2ax + 4a$ を満たせばよい。これを a について整理すると $y - x^2 = 2a(2 - x)$ である。

$x \neq 2$ のときは $a = \frac{y - x^2}{2(2 - x)}$ と一意に定まり、そのような実数 a が存在する。 $x = 2$ のときは左辺が 0 でなければならないから $y = 4$ である。

したがって必要十分条件は $(x \neq 2)$ または $(y = 4)$ である。言い換えると、 $x = 2$ のときに限り $y = 4$ を要する。

(4) 放物線 C の $x = t$ における接線を考える。 C の導関数は $y' = 2x - 2a$ だから、接点 $x = t$ における傾きは $2t - 2a$ である。したがって接線は $y - (t^2 - 2at + 4a) = (2t - 2a)(x - t)$ となり、整理すると $y = (2t - 2a)x - t^2 + 4a$ である。この接線が点 $(3, -1)$ を通るためには $-1 = 3(2t - 2a) - t^2 + 4a$ すなわち $2a = 6t - t^2 + 1$ である。右辺は $2a = 10 - (t - 3)^2$ と書けるから $a = 5 - \frac{(t - 3)^2}{2}$ である。よって $a \leq 5$ が必要である。また、 $a \leq 5$ なら $(t - 3)^2 = 2(5 - a)$ を満たす実数 t が存在するので接線が引ける。

したがって必要十分条件は $a \leq 5$ である。

【総評】 (1) は判別式 0 の計算で符号を落としていないかを確認した。(2) は頂点の x 座標がそのまま a になるので、消去後の軌跡が下に開く放物線になることを検算した。(3) は $x = 2$ が唯一の例外点であることが本質で、存在条件を $x \neq 2$ または $y = 4$ と書けているかを確認した。(4) は接点 t を用いた接線式から a の上限を出し、逆向きも実際に実数 t が取れることを確かめた。

【第 3 問】

一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。底面 ABC の内接円の半径を r とおき、頂点 O を通り底面 ABC に垂直な直線からの距離が r 以下である点全体からなる円柱を T とする。

(1) r を求めよ。

(2) 正四面体 $OABC$ の高さを求めよ。

(3) 辺 AB の中点と頂点 O を結ぶ線分上に点 P をとり、 $x = OP$ とおく。 P を通り底面 ABC に平行な平面による側面 OAB の切り口を L とする。 L が T に含まれるような x の最大値を x_1 とするとき、 x_1 を求めよ。また、 $x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さを x で表せ。さらに、正四面体 $OABC$ の表面で T に含まれる部分の面積を求めよ。

【方針】

(1) 底面は正三角形なので内接円半径の公式を使う。(2) 正四面体の高さは、底面の重心と頂点を結ぶ線分で三平方により求める。(3) 座標を置き、側面の切り口の長さと円柱条件を不等式で比較する。最後に 3 つの側面と底面の寄与を足す。

【解答】

(1) 底面 ABC は一辺 1 の正三角形であるから、その内接円の半径は $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ である。

(2) 正四面体の底面 ABC の重心を G とすると、 OG は底面に垂直である。正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、重心から頂点までの距離はその $\frac{2}{3}$ 倍より $\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。よって三平方の定理から、 $\triangle OGA$ において $OA^2 = OG^2 + GA^2$ より $1 = OG^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ となる。したがって $OG^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、正四面体の高さは $\frac{\sqrt{6}}{3}$ である。

(3) 底面を $z = 0$ 平面に、円柱 T の軸を z 軸にとる。例えば

$$O = (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}), \quad A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), \quad B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), \quad C = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

とおくと、 AB の中点を M として $M = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ であり、 $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

P を OM 上にとり $x = OP$ とすると、 P を通る底面に平行な平面で切った側面 OAB の切り口 L は AB に平行な線分で、その長さは相似より $\frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ である。これが円柱 T にすべて含まれる条件は、端点が軸からの距離 r 以下であることだから、 $\frac{2x}{\sqrt{3}} \leq 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$ に等しい。 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ を代入して整理すると $x \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ となる。したがって $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ である。

次に $x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さは $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$ である。

側面 OAB 上で T に含まれる部分の面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}/4} \frac{2x}{\sqrt{3}} dx + \int_{\sqrt{3}/4}^{\sqrt{3}/2} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4} - x^2} dx$$

である。計算すると $\frac{\pi}{12}$ となる。3 つの側面は合同なので、側面全体での面積は $\frac{\pi}{4}$ である。

また、底面 ABC で T に含まれる部分は半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ の円であり、その面積は $\pi r^2 = \frac{\pi}{12}$ である。したがって、正四面体 $OABC$ の表面で T に含まれる部分の面積は $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ である。

【総評】 (1) は正三角形の内接円半径の公式で直ちに出るが、正四面体の高さを取り違えないように再確認した。(2) は底面重心から頂点への距離を用いる三平方の式が正しいかを検算した。(3) は円柱の軸からの距離条件を端点で判定し、 $x_1 = \sqrt{3}/4$ と切り口の長さ $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$ を独立に照合した。最後に側面 3 枚と底面の面積を別々に足して $\pi/3$ になることを確認した。

【第 4 問】

$\log x$ は自然対数を表し、 e は自然対数の底を表す。

(1) a, b は $-1 < a < 1$, $b > 0$ を満たす実数とする。曲線 $C: y = \log x$ と直線 $\ell: y = ax + b$ が接しているとき、 b を a で表せ。また、曲線 C と 3 つの直線 $x = 1$, $x = e$, ℓ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とすると、 a が $e^{-1} < a < 1$ の範囲を動くときの $S(a)$ の最小値を求めよ。

(2) k を正の定数とし、 $e^{-k} < t < 1$ である t に対して

$$f(t) = \int_0^k |e^{x-k} - t| dx$$

とおく。 t が $e^{-k} < t < 1$ の範囲を動くときの関数 $f(t)$ の最小値を $M(k)$ とおくと、 $M(k)$ を求め、さらに

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2}$$

を求めよ。

【方針】

(1) 接線条件は接点の傾き一致から求める。面積は差を積分して a で微分し、最小化する。(2) 絶対値の符号が変わる点で積分を分け、最小値は分岐点が区間の中央にくるときに達成される。

【解答】

(1) 接点の x 座標を x_0 とすると、 $\log x$ の導関数は $1/x$ だから、接線の傾きより $a = \frac{1}{x_0}$ である。よって $x_0 = \frac{1}{a}$ である。接点では $b = \log x_0 - ax_0$ だから $b = \log \frac{1}{a} - 1 = -\log a - 1$ である。

次に、 $a \in (e^{-1}, 1)$ なので $1/a \in (1, e)$ であり、直線 ℓ は区間 $[1, e]$ の内部で曲線 $y = \log x$ に接する。したがって、求める面積は

$$S(a) = \int_1^e (ax + b - \log x) dx$$

である。ここに $b = -\log a - 1$ を代入すると

$$S(a) = \int_1^e (ax - \log a - 1 - \log x) dx$$

となる。

$$\int_1^e x dx = \frac{e^2 - 1}{2}, \quad \int_1^e \log x dx = 1$$

より $S(a) = \frac{e^2 - 1}{2}a - (e - 1)(\log a + 1) - 1$ である。これを a で微分すると $S'(a) = \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{e - 1}{a}$ であるから、極値は $a = \frac{2}{e + 1}$ で与えられる。これは $e^{-1} < a < 1$ を満たす。このとき $S\left(\frac{2}{e + 1}\right) = (e - 1)\log \frac{e + 1}{2} - 1$ である。したがって、最小値は $(e - 1)\log \frac{e + 1}{2} - 1$ である。

(2) $g(x) = e^{x-k}$ とおくと、 g は $[0, k]$ 上で単調増加し、値域は $[e^{-k}, 1]$ である。

$$f(t) = \int_0^k |g(x) - t| dx$$

の最小値は、 $g(x) = t$ となる点が区間の中央にくるときに達成される。したがって $t = e^{-k/2}$ である。

このとき

$$M(k) = \int_0^{k/2} (e^{-k/2} - e^{x-k}) dx + \int_{k/2}^k (e^{x-k} - e^{-k/2}) dx$$

である。計算すると $M(k) = 1 + e^{-k} - 2e^{-k/2} = (1 - e^{-k/2})^2$ となる。

さらに、 $k \rightarrow +0$ のとき $e^{-k/2} = 1 - \frac{k}{2} + O(k^2)$ だから $M(k) = (1 - e^{-k/2})^2 = \frac{k^2}{4} + O(k^3)$ である。よって

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2} = \frac{1}{4}$$

である。

【総評】 (1) は接点の傾き一致から $x_0 = 1/a$ を出し、その後の切片 b と面積積分の向きが画像と一致するかを再検算した。特に

$$\int_1^e \log x \, dx = 1$$

を正しく用いると最小値は $(e-1) \log \frac{e+1}{2} - 1$ になる点を確認した。(2) は絶対値の分岐点を $t = e^{-k/2}$ に取るのが要点で、積分結果が $(1 - e^{-k/2})^2$ に簡約されることと、小さい k で $M(k) \sim k^2/4$ になることを独立に確かめた。