

上智大学 2013 年度 経済学科数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) $0 \leq x < 2\pi$ とし、

$$f(x) = \cos^4 x + \sin 3x - \sin^4 x + 2 \sin x$$

とする。 $f(x)$ の最大値・最小値と、それぞれをとる $\sin x$ の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$) で定め、 $S_{n,m} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{n+j}$ とする。(i) $S_{3,6}, S_{4,6}$ を求め、 $S_{n,6}$ を $a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}, a_{n+5}$ で整理せよ。(ii) すべての自然数 n に対し $S_{n,10} = qa_{n+r}$ を満たす自然数 q, r を求めよ。

【方針】

(1) $t = \sin x$ として $[-1, 1]$ 上の 3 次関数に直し、導関数と端点を比較する。(2) 漸化式を繰り返し使って項をそろえ、6 項和と 10 項和を 1 項にまとめる。

【解答】

(1) $t = \sin x$ とすると $f = -4t^3 - 2t^2 + 5t + 1$ 。導関数は $-(2t-1)(6t+5)$ なので、端点も含めて比較する。 $t = 1/2$ のとき最大値 $5/2$, $t = -5/6$ のとき最小値 $-121/54$ 。

(2)(i) 漸化式で整理すると $S_{n,6} = 2a_{n+2} + 2a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5}$ 。さらに

$$S_{n,6} = a_{n+2} + a_{n+3} + 3a_{n+4} = 4a_{n+4}.$$

よって $S_{3,6} = 52$, $S_{4,6} = 84$ 。

(2)(ii) 同様に 10 項をまとめると $S_{n,10} = 11a_{n+6}$ 。したがって $q = 11, r = 6$ 。

【第 2 問】

実数 a, b に対し、2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -(x-a)^2 + b$$

を考える。

(1) C_1, C_2 が共有点をもつための必要十分条件を求めよ。

(2) 異なる 2 共有点を P, Q , その x 座標を p, q ($q < p$) とする。 pq を a, b で表し、 P における C_1 の接線 ℓ の方程式を求めよ。さらに $a > 0, b = 7/2$ で、 P, Q における C_1 の接線が直交するときの a, p と、2 放物線で囲まれる面積を求めよ。

【方針】

共有点の 2 次方程式について判別式と解と係数の関係を使う。接線の傾きの積が -1 となる条件から pq を決める。面積は 2 つのグラフの差を根 p, q で因数分解して積分する。

【解答】

(1) 共有点の x は $2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$ を満たす。判別式が 0 以上となる条件は $a^2 - 2b \leq 0$ 。

(2) 解と係数の関係から $pq = (a^2 - b)/2$ 。 C_1 の P における接線は $y = 2px - p^2$ 。2 本の接線が直交する条件は $4pq = -1$ なので、 $b = 7/2$ を代入すると $a = \sqrt{3}$ 。また $p + q = \sqrt{3}, pq = -1/4, q < p$ より $p = (\sqrt{3} + 2)/2$ 。グラフの差を積分すると面積は $(p - q)^3/3 = 8/3$ 。

【第 3 問】

点 $P(m, n)$ は原点から出発し, 1 回ごとに $(m+1, n+1)$ または $(m+1, n-1)$ へ進む。

$$L = \{(x, -2) \mid 0 \leq x \leq 9\}, \quad U = \{(x, 4) \mid 0 \leq x \leq 9\}, \quad S = \{(9, y) \mid -2 < y < 4\}$$

のいずれかに到達した時点で停止する。

(1) U 上の点 $(6, 4), (8, 4)$ に到達して停止する経路数を求めよ。(2) 壁 L に到達して停止する経路の総数を求めよ。(3) 上下それぞれへ進む確率が $1/2$ のとき, 壁 L および壁 S で停止する確率を求めよ。

【方針】

上昇・下降の並びとして経路を数える。目的点より前に別の壁へ到達する並びを除外する。確率は経路長ごとに $(1/2)^m$ を掛け, 壁 S は全確率から上下の壁の確率を引く。

【解答】

(1) $(6, 4)$ では最後の 2 歩が上昇なので, 残る 4 歩の下降 1 回の位置を選び 4 通り。 $(8, 4)$ は一旦 15 通りと数え, 先に U に当たる 2 経路を除いて 13 通り。

(2) 停止点 $(2, -2), (4, -2), (6, -2), (8, -2)$ ごとの経路数はそれぞれ 1, 2, 5, 14。合計 22 通り。

(3) 壁 L の確率は $2^{-2} + 2 \cdot 2^{-4} + 5 \cdot 2^{-6} + 14 \cdot 2^{-8} = 65/128$ 。同様に壁 U の確率は $2^{-4} + 4 \cdot 2^{-6} + 13 \cdot 2^{-8} = 45/256$ 。したがって壁 S の確率は $1 - 65/128 - 45/256 = 81/256$ 。