

上智大学 2013 年度 経営学科数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 次を簡単にせよ。

$$\frac{1}{2} \log_3 384 + \log_9 108 - \log_{\sqrt{3}} 6.$$

(2) $4/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ を $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ の形にせよ。

(3) 連立不等式

$$y \geq |x^2 - 2x|, \quad y \leq -x + 6, \quad |x| \leq 2$$

の表す領域を D とする。(i) D の面積を求めよ。(ii) (x, y) が D を動くとき $4x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

【方針】

対数は底を 3 に統一する。根号式は分母との積の係数を比較する。領域は絶対値の中の 2 次式の符号で分けて図示し、面積を積分する。一次式の最大・最小は平行な直線を動かして接点を探す。

【解答】

(1) 底を 3 に直して整理すると $(5/12) \log_3 2$ 。(2) 分母を払って係数を比較すると $4/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}$ 。(3)(i) $|x^2 - 2x|$ を $[-2, 0]$ と $[0, 2]$ で分け、直線との差を積分すると面積は $16/3$ 。(3)(ii) $4x + y = k$ を領域上で動かす。最大は点 $(2, 4)$ で 12。最小は曲線 $y = x^2 - 2x$ に傾き -4 の直線が接する点 $(-1, 3)$ で -1 。

【第 2 問】

座標空間の 3 点 $A(2, 0, 1), B(3, 0, 3), C(2, 1, -1)$ を考え、 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とする。(1) $\vec{b}, \vec{c}$ のなす角を θ とするとき $\sin \theta$ を求めよ。(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。(3) $P(1, 1/3, -1/6)$ とする。 $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{b}, \overrightarrow{PQ} \perp \vec{c}$ を満たす点 Q を実数 t で表せ。また、同じ垂直条件を満たし平面 ABC 上にある点 H を求めよ。(4) 四面体 $ABCP$ の体積を求めよ。

【方針】

$\vec{b}, \vec{c}$ の長さと内積から正弦と面積を求める。両方に垂直なベクトルは成分を置き、2 本の内積が 0 となる連立方程式で求める。点 H は P を通る垂線と平面 ABC の交点である。

【解答】

 $\vec{b} = (1, 0, 2), \vec{c} = (0, 1, -2)$ で、 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{5}, \vec{b} \cdot \vec{c} = -4$ 。(1) $\cos \theta = -4/5$ だから $\sin \theta = 3/5$ 。(2) 面積は $|\vec{b} \times \vec{c}|/2 = 3/2$ 。(3) ベクトル (u, v, w) が $\vec{b}, \vec{c}$ の両方に垂直である条件 $u + 2w = 0, v - 2w = 0$ を解く。よって共通垂線の方法は $(-2, 2, 1)$ だから

$$Q = (1 - 2t, 1/3 + 2t, t - 1/6).$$

平面 ABC の方程式に代入すると $t = -1/6$ で、 $H = (4/3, 0, -1/3)$ 。(4) 平面 ABC は $-2x + 2y + z + 3 = 0$ であり、点 P からこの平面までの距離は $1/2$ 。したがって体積は $(1/3)(3/2)(1/2) = 1/4$ 。

【第 3 問】

k を 2 以上の整数とし、方程式

$$3x + 2y + z = 6k - 1$$

の正の整数解を考える。

(1) 解の組 (x, y, z) の個数を $k = 2, 3$ について求めよ。(2) x のとり得る値の個数を求めよ。(3) 解の組の総数を k で表せ。

以下 k は 2 以上の偶数とする。(4) $x \leq k$ を満たす解の個数を求めよ。(5) $x \leq k, z \leq 3k$ を同時に満たす解の個数を求めよ。

【方針】

x を固定すると、 $z = 6k - 3x - 1 - 2y$ が正になる y の個数を数えればよい。 x の偶奇で上限が変わるため分けて和を取る。追加条件は和の範囲を $x \leq k$ に切り、 $z \leq 3k$ を y の下限へ変換する。

【解答】

(1) $k = 2$ では 5 組、 $k = 3$ では 16 組。

(2) $y, z \geq 1$ から $3x \leq 6k - 4$ 。したがって $x = 1, 2, \dots, 2k - 2$ の $2k - 2$ 個。

(3) x が奇数・偶数の場合の y の個数をそれぞれ求め、 $x = 1$ から $2k - 2$ まで加えると $3k^2 - 4k + 1$ 。

(4) 同じ和を $x = 1, \dots, k$ に制限する。 k は偶数なので奇数・偶数が各 $k/2$ 個あり、個数は $9k^2/4 - 2k$ 。

(5) $z = 6k - 3x - 1 - 2y \leq 3k$ より $y \geq (3k - 3x - 1)/2$ 。この下限と正值条件を合わせて数えると $3k^2/2 - 1$ 。