

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2013 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) 次の行列が表す xy 平面上の一次変換をそれぞれ答えよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 原点 O と異なる点 P を，まず x 軸に関して対称移動し，さらに原点のまわりに反時計回りに 30° 回転して得られる点を Q とする。 Q が直線 OP 上にあるとき， OQ/OP を求め，点 P がある 2 直線の方程式を求めよ。

第 2 問

xy 平面上の点 $A(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ を中心とする半径 4 の円 R を考える。糸の一方の端点を原点 O に固定し、糸をたるみのない状態で円 R に下側から 1 点で接するように張ったとき、 O と反対側の糸の端点を P とする。糸と R との接点を B とすると、 BP の長さは 4π であった。

(1) OB の長さ、 OB と x 軸の正の向きとのなす角、および点 B の x 座標を求めよ。

(2) 次に、糸をたるみのないように張ったまま、点 B を起点としてその糸の BP の部分を毎秒 30° の円周で円 R に巻きつけていく。巻きつけている部分から、 B ではない方の端点を C とする。 $0 \leq t \leq 6$ とすると、巻きつけ始めてから t 秒後の時点での $\overrightarrow{AC}$, CP , および点 P の速さを求めよ。

第 3 問

s, t を実数とし，関数

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x - 5 & (x \leq 2), \\ \frac{3}{x-t} + s & (x > 2) \end{cases}$$

がすべての実数 x に対して定義され， $x = 2$ で微分可能であるとする。また，実数 a と正の実数 b に対し，

$$A = \{x \mid f(x) < a\}, \quad B = \{x \mid -b < x < b\}$$

とする。

- (1) t と s を求めよ。
- (2) A が空集合であるための必要十分条件を求めよ。
- (3) $B \subset A$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (4) $A \subset B$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (5) $x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_1, x_3 \in A$, $x_2 \notin A$ を満たす実数 x_1, x_2, x_3 が存在するための必要十分条件を求めよ。

第 4 問

(1) xy 平面で、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における C の接線が x 軸と交わる点を A 、 y 軸と交わる点を B とする。 OA 、 OB 、 AB を求めよ。

(2) xyz 空間において、頂点が z 軸の正の部分にあり、底面が xy 平面上にある直円錐で、その側面が原点を中心とする半径 1 の球面に接しているものを考える。そのような直円錐のうち、表面積が最小になる場合を考えると、その表面積と頂点の z 座標を求めよ。また、体積が最小になる場合を考えると、その体積と頂点の z 座標を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)