

上智大学 2013 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 次の行列が表す xy 平面上の一次変換をそれぞれ答えよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 原点 O と異なる点 P を, まず x 軸に関して対称移動し, さらに原点のまわりに反時計回りに 30° 回転して得られる点を Q とする。 Q が直線 OP 上にあるとき, OQ/OP を求め, 点 P がある 2 直線の方程式を求めよ。

【方針】

(1) 各行列を, 直線に関する対称移動と回転移動の標準行列に照合する。(2) $P = (x, y)$ とおき, 2 変換の合成で得た Q と P の一次従属条件を行列式で表す。

【解答】

(1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は $(x, y) \mapsto (y, x)$ だから, 直線 $y = x$ に関する対称移動である。

直線 $y = (\tan \phi)x$ に関する対称移動の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

である。第 2 の行列では $2\phi = \pi/3$ なので, 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動である。

第 3 の行列は回転行列

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

だから, 原点のまわりの反時計回り 30° の回転移動である。

(2)

$P = (x, y)$ とする。 x 軸に関する対称移動の後に 30° 回転すると $Q = \left(\frac{\sqrt{3}x + y}{2}, \frac{x - \sqrt{3}y}{2} \right)$ となる。2 つの変換はいずれ

も距離を保つので $\frac{OQ}{OP} = 1$ 。 O, P, Q が一直線上にある条件は $x \frac{x - \sqrt{3}y}{2} - y \frac{\sqrt{3}x + y}{2} = 0$, すなわち $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 = 0$ である。 $x \neq 0$ として $m = y/x$ とおけば $m^2 + 2\sqrt{3}m - 1 = 0$ より $m = 2 - \sqrt{3}$, $m = -(2 + \sqrt{3})$. したがって求める 2 直線は $y = (2 - \sqrt{3})x$, $y = -(2 + \sqrt{3})x$ である。

【総評】 3 つの行列を標準形と照合し, 合成変換を座標で再計算した。距離比は両変換が等長変換であることから 1 となる。共線条件から得た二次式へ 2 本の傾きを代入し, いずれも 0 になることを確認した。

【第 2 問】

xy 平面上の点 $A(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ を中心とする半径 4 の円 R を考える。糸の一方の端点を原点 O に固定し、糸をたるみのない状態で円 R に下側から 1 点で接するように張ったとき、 O と反対側の糸の端点を P とする。糸と R との接点を B とすると、 BP の長さは 4π であった。

(1) OB の長さ、 OB と x 軸の正の向きとをなす角、および点 B の x 座標を求めよ。

(2) 次に、糸をたるみのないように張ったまま、点 B を起点としてその糸の BP の部分を毎秒 30° の円周で円 R に巻きつけていく。巻きつけている部分から、 B ではない方の端点を C とする。 $0 \leq t \leq 6$ とすると、巻きつけ始めてから t 秒後の時点での $\overrightarrow{AC}$, CP , および点 P の速さを求めよ。

【方針】

(1) 原点から円への接線に着目し、半径と接線の垂直性から直角三角形を作る。(2) 巻き取り角の時間変化を中心角で表し、残りの糸の長さと接点の位置を時間の関数として記述する。最後に微分して点 P の速さを出す。

【解答】

(1)

円の中心は $A(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ 、原点は $O = (0, 0)$ であるから $OA = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8$ である。接点 B では半径 AB が接線 OB に垂直なので、 $\triangle OAB$ は B を直角とする直角三角形である。よって $OB = \sqrt{OA^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ 。

また $\cos \angle AOB = \frac{OB}{OA} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\angle AOB = 30^\circ$ 。 OA は x 軸の正の向きとなす角が 45° であるから、接線 OB はその下側にあり、 x 軸の正の向きとなす角は $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ である。したがって $B = (4\sqrt{3} \cos 15^\circ, 4\sqrt{3} \sin 15^\circ)$ であり、 $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ だから、 B の x 座標は $4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ である。

(2)

弧 BP の長さは 4π 、半径は 4 なので、対応する中心角は $\frac{4\pi}{4} = \pi$ である。巻きつける角速度は毎秒 $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ラジアンであるから、 t 秒後に巻きついた弧の中心角は $\frac{\pi}{6}t$ 、残りの弧 CP の中心角は $\pi - \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{6}(6 - t)$ である。したがって $CP = 4 \cdot \frac{\pi}{6}(6 - t) = \frac{2\pi}{3}(6 - t)$ である。

また、接点 C は中心 A のまわりを角速度 $\frac{\pi}{6}$ で動く。 $t = 0$ で $C = B$ だから、 $\overrightarrow{AC}$ の偏角を θ とすると $\theta = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{12}(2t - 5)$ である。よって

$$\overrightarrow{AC} = 4(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{12}(2t - 5).$$

さらに、点 P の速さは、巻き取りによる接線方向の移動であるから $\left| \frac{dP}{dt} \right| = \frac{\pi}{6} CP$ となる。したがって

$$\left| \frac{dP}{dt} \right| = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{3}(6 - t) = \frac{\pi^2}{9}(6 - t)$$

である。

【総評】 第 2 問は、接線長と弧長を取り違えないこと、接点 C の偏角の初期値を B の位置から正しく定めること、速さは大きさとして扱うことを検算した。

条件の読み落としと端点の扱いに注意し、得られた値を元の式へ代入してすべての設問条件を満たすことを独立に確認した。

【第 3 問】

s, t を実数とし、関数

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x - 5 & (x \leq 2), \\ \frac{3}{x-t} + s & (x > 2) \end{cases}$$

がすべての実数 x に対して定義され、 $x = 2$ で微分可能であるとする。また、実数 a と正の実数 b に対し、

$$A = \{x \mid f(x) < a\}, \quad B = \{x \mid -b < x < b\}$$

とする。

- (1) t と s を求めよ。
- (2) A が空集合であるための必要十分条件を求めよ。
- (3) $B \subset A$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (4) $A \subset B$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件を求めよ。
- (5) $x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_1, x_3 \in A$, $x_2 \notin A$ を満たす実数 x_1, x_2, x_3 が存在するための必要十分条件を求めよ。

【方針】

(1) 連続条件と導関数の一致条件から t, s を決める。(2) 左右の各部分の値域を調べ、 $f(x) < a$ を満たす点が存在しない条件を求める。(3)(4) A の有界性を判定する。(5) A に穴が生じる条件を、左側の三次関数の極大値と極小値、および右側の有理関数の振る舞いから調べる。

【解答】

(1)

$x = 2$ で微分可能であるから、連続であり、左右の導関数も一致する。左側は $-2^3 + 9 \cdot 2 - 5 = 5$ である。よって $\frac{3}{2-t} + s = 5$ である。また、左側の導関数は $(-x^3 + 9x - 5)' = -3x^2 + 9$ であり、 $x = 2$ では -3 である。右側の導関数は $\left(\frac{3}{x-t} + s\right)' = -\frac{3}{(x-t)^2}$ だから、 $x = 2$ で $-\frac{3}{(2-t)^2} = -3$ となる。したがって $(2-t)^2 = 1$ より、 $t = 1$ または 3 である。ただし、 f はすべての実数で定義されるので、 $x > 2$ の式で分母が 0 になってはならない。 $t = 3$ では $x = 3$ で定義できないから不適である。よって $t = 1$ である。これを代入して $\frac{3}{2-1} + s = 5$ より $s = 2$ である。

(2)

$t = 1, s = 2$ より

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x - 5 & (x \leq 2), \\ \frac{3}{x-1} + 2 & (x > 2) \end{cases}$$

である。左側の関数を $g(x) = -x^3 + 9x - 5$ とおくと、 $g'(x) = -3x^2 + 9$ より、 $x = -\sqrt{3}$ で極小、 $x = \sqrt{3}$ で極大をとり、それぞれ $g(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} - 5$, $g(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 5$ である。右側は $x > 2$ で常に $\frac{3}{x-1} + 2 > 2$ である。したがって、 $f(x) < a$ を満たす点が存在しないのは、左側でも右側でも不等式が成り立たないとき、すなわち $a \leq -6\sqrt{3} - 5$ である。

(3)

$B \subset A$ となる正の b が存在するとは、ある正の数 b について $-b < x < b$ のすべてで $f(x) < a$ が成り立つことである。 $x = 0$ では $f(0) = -5$ であるから、必要条件は $a > -5$ である。逆に $a > -5$ なら、 $x = 0$ で $f(x) = -5 < a$ であり、 f は 0 の近くで連続だから、 0 の十分近くの小さい区間がすべて A に入る。よって必要十分条件は $a > -5$ である。

(4)

$A \subset B$ となる正の b が存在するには、 A が有界であれば十分であり、また必要でもある。 $t = 1, s = 2$ のとき、右側の式は $x > 2$ で常に $2 < f(x)$ である。したがって $a > 2$ なら A は右へ無限に伸びて有界でない。逆に $a \leq 2$ なら右側には A に入る点がなく、左側の不等式 $-x^3 + 9x - 5 < a$ の解集合は有界である。よって必要十分条件は $a \leq 2$ である。

(5)

$m = -6\sqrt{3} - 5$, $M = 6\sqrt{3} - 5$ とおく。左側の三次関数 $g(x) = -x^3 + 9x - 5$ は、 $x = -\sqrt{3}$ で極小値 m , $x = \sqrt{3}$ で極大値 M をとる。

$a \leq m$ では $A = \emptyset$ なので条件を満たさない。 $m < a \leq M$ では、三次関数のグラフと水平線 $y = a$ の位置関係から、 A に

属する 2 点の間に A に属さない点を選べる。特に $a = M$ では $x = \sqrt{3}$ だけが境界となるが、その左右に A の点がある。
 $a > M$ では $x \leq 2$ の部分が 1 つの半直線となり、さらに $x > 2$ の部分とつながって A は 1 つの区間になる。

したがって必要十分条件は $-6\sqrt{3} - 5 < a \leq 6\sqrt{3} - 5$ である。

【総評】 第 3 問は、 $x=2$ での微分可能条件から $t=1, s=2$ に確定するかを最初に確認し、その後は左側三次関数の極小値と極大値、右側有理関数の $x>2$ での挙動を同時に見て A の形を判定した。

【第 4 問】

(1) xy 平面で、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における C の接線が x 軸と交わる点を A 、 y 軸と交わる点を B とする。 OA, OB, AB を求めよ。

(2) xyz 空間において、頂点が z 軸の正の部分にあり、底面が xy 平面上にある直円錐で、その側面が原点を中心とする半径 1 の球面に接しているものを考える。そのような直円錐のうち、表面積が最小になる場合を考えると、その表面積と頂点の z 座標を求めよ。また、体積が最小になる場合を考えると、その体積と頂点の z 座標を求めよ。

【方針】

(1) 円の接線の方程式または半径と接線の垂直性から、 x 切片と y 切片を求める。(2) 円錐の底面半径を r 、高さを h とおき、側面が単位球に接する条件を断面で表して r, h の関係を作る。表面積と体積を 1 変数化して微分で最小値を求める。

【解答】

(1)

半径 1 の円 C の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における接線の方程式は $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ である。 x 軸との交点 A では $y = 0$ だから $x \cos \theta = 1$ より $A(\frac{1}{\cos \theta}, 0)$ であり、 $OA = \frac{1}{\cos \theta}$ である。同様に、 y 軸との交点 B では $x = 0$ だから $y \sin \theta = 1$ より $B(0, \frac{1}{\sin \theta})$ であり、 $OB = \frac{1}{\sin \theta}$ である。さらに

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

である。

したがって

$$OA = \frac{1}{\cos \theta}, \quad OB = \frac{1}{\sin \theta}, \quad AB = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

である。

(2)

円錐の底面半径を r 、高さを h とする。軸を含む断面で考えると、頂点 $(0, h)$ と底面の端点 $(r, 0)$ を結ぶ母線は直線であり、この直線が原点を中心とする半径 1 の円に接する。したがって、原点からこの直線への距離が 1 である。直線の方程式は $hx + ry - rh = 0$ であるから、原点からの距離は $\frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}}$ であり、これが 1 に等しい。よって $\frac{rh}{\sqrt{r^2 + h^2}} = 1$ すなわち $r^2 h^2 = r^2 + h^2$ である。

これより $r^2 = \frac{h^2}{h^2 - 1}$ と表せる。

表面積を S とすると、側面積は $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ 、底面積は πr^2 である。条件式より $\sqrt{r^2 + h^2} = rh$ だから $S = \pi r(rh) + \pi r^2 = \pi r^2(h + 1)$ である。ここに $r^2 = \frac{h^2}{h^2 - 1}$ を代入すると $S = \pi \frac{h^2}{h^2 - 1}(h + 1) = \pi \frac{h^2}{h - 1} \quad (h > 1)$ となる。これを微分すると

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{h^2}{h - 1} \right) = \frac{2h(h - 1) - h^2}{(h - 1)^2} = \frac{h(h - 2)}{(h - 1)^2}$$

であるから、 $h > 1$ で最小となるのは $h = 2$ である。このとき $r^2 = \frac{4}{3}$ であり、 $S = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = 4\pi$ である。したがって、表面積の最小値は 4π で、そのときの頂点の z 座標は 2 である。

次に体積 V は $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ であるから、 $r^2 = \frac{h^2}{h^2 - 1}$ を代入して $V = \frac{1}{3} \pi \frac{h^3}{h^2 - 1} \quad (h > 1)$ となる。これを微分すると

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{h^3}{h^2 - 1} \right) = \frac{3h^2(h^2 - 1) - 2h^4}{(h^2 - 1)^2} = \frac{h^2(h^2 - 3)}{(h^2 - 1)^2}$$

であるから、 $h > 1$ で最小となるのは $h = \sqrt{3}$ である。このとき $r^2 = \frac{3}{2}$ より $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ である。したがって、体積の最小値は $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ で、そのときの頂点の z 座標は $\sqrt{3}$ である。

【総評】 第 4 問は、断面で母線を直線と見て原点からの距離を 1 と置けるかが最重要である。表面積と体積は別の 1 変数関数になるので、最小化の微分計算を最後まで独立に行い、 $h = 2$ と $h = \sqrt{3}$ を取り違えないことを確認した。