

上智大学 2014 年度 経済学科数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 7 = 0.8451$ とする。 3^{2014} の桁数, 最上位の数字, 一の位の数字を求めよ。

(2) 連立不等式

$$y \leq -2x^2 - 8x - 3, \quad y \geq |3x + 6|$$

で表される領域を D とする。

(i) D の面積を求めよ。

(ii) 点 (x, y) が D を動くとき, $4x + y$ および $x^2 + 4x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

【方針】

(1) 常用対数の整数部分と小数部分から桁数と最高位を決め, 一の位は 3 の累乗の周期を使う。(2) 絶対値を $x = -2$ で分けて放物線との交点を求める。面積は積分, 最大・最小は領域の上下境界で各式を調べる。

【解答】

(1) $2014 \log_{10} 3 = 960.8794$ だから 961 桁。 $\log_{10} 7 < 0.8794 < \log_{10} 8$ より最上位は 7。また $2014 \equiv 2 \pmod{4}$ なので, 一の位は 9。

(2)(i) 上側の放物線と $y = |3x + 6|$ の交点を左右で求め, 差を積分すると

$$\int_{-3}^{-2} \{-2x^2 - 5x + 3\} dx + \int_{-2}^{-1} \{-2x^2 - 11x - 9\} dx = \frac{17}{3}.$$

(2)(ii) $4x + y$ は上下境界と端点で比較し, 最大値 -1 , 最小値 -9 。 $x^2 + 4x + y$ も同様に比較して, 最大値 1 , 最小値 -4 。

【第 2 問】

座標空間で, 原点 O を通りベクトル $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ に平行な直線を ℓ とする。点 $A = (\sqrt{3} + 3, 3\sqrt{3} + 3, 6 - 2\sqrt{3})$ とする。頂点が O , 底面の中心が ℓ 上にあり, 底面の円周が A を通る円錐 C を考える。

(1) 底面の中心を H とするとき, $\angle AOH$ を求めよ。

(2) H の座標を求めよ。

(3) 点 $(\sqrt{3}, y, z)$ が C の底面上にあるとき, y, z の間に常に成り立つ 1 次方程式を求めよ。

(4) 点 $(\sqrt{3}, y, z)$ が C の側面上にあるとき, y, z の間に常に成り立つ 2 次方程式を求めよ。また, このときの z の最大値を求めよ。

【方針】

軸方向ベクトルと $\overrightarrow{OA}$ の内積から円錐の半頂角を求める。底面中心は A の軸への正射影である。底面は軸に垂直な平面, 側面は軸との角が一定という内積条件で表す。最大値は側面と底面円周の交線上で求める。

【解答】

$\vec{u} = (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ とする。

(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 16\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{OA}| = 4\sqrt{6}$, $|\vec{u}| = 4$ より $\cos \angle AOH = 1/\sqrt{2}$ 。したがって $\angle AOH = \pi/4$ 。

(2) $OH = OA \cos(\pi/4) = 4\sqrt{3}$ なので, $\overrightarrow{OH} = (OH/|\vec{u}|)\vec{u} = \sqrt{3}\vec{u}$ 。よって $H = (\sqrt{3}, 3, 6)$ 。

(3) 底面は $\vec{u}$ に垂直で H を通る。 $(\sqrt{3}, y, z) - H$ と $\vec{u}$ の内積を 0 とすると $y + 2z - 15 = 0$ 。

(4) 側面上の点 $Q = (\sqrt{3}, y, z)$ では $\angle QOH = \pi/4$ 。内積条件を 2 乗して整理すると

$$5y^2 - 12yz - 4z^2 - 6y - 12z + 21 = 0.$$

z が最大となるのは底面の円周上であるから, $y = -2z + 15$ を代入する。得られる $5z^2 - 60z + 132 = 0$ の大きい解より, $z_{\max} = 6 + \frac{4}{5}\sqrt{15}$ 。

【第 3 問】

1 から 10 までを 1 枚ずつ書いた 10 枚のカードを左から順に並べる。この中から 3 枚を無作為に選び、どのカードも元の位置とは異なる位置へ置く。2 回目以降は最初の並びへ戻さず、直前の並びから同じ操作を繰り返す。各操作では、選ばれた 3 枚を元の位置と異なる位置へ置く 2 通りを等確率とする。 n 回の操作後、一番左のカードが 10 である確率を P_n とする。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) n 回後に一番左が 10 であり、次の操作後も一番左が 10 となる確率を P_n を用いて表せ。
- (3) n 回後に一番左が 10 でなく、次の操作後に一番左が 10 となる確率を P_n を用いて表せ。
- (4) P_{n+1} を P_n で表せ。
- (5) P_n を求めよ。

【方針】

「一番左が 10」「そうでない」の 2 状態に分ける。選ぶ 3 位置に左端や 10 の位置が含まれる確率と、2 つの置換のうち左端へ 10 が来る割合を数え、1 次漸化式を解く。

【解答】

- (1) 左端と 10 の位置に加えてもう 1 位置を選ぶ方法が 8 通り、各 3 位置で 10 が左端へ移る置き方が 2 通り中 1 通りなので、 $P_1 = 8/120 \cdot 1/2 = 1/30$ 。
- (2) 左端の 10 を選ばない確率は $84/120 = 7/10$ 。よって $(7/10)P_n$ 。
- (3) 左端と 10 の現在位置を含む 3 位置を選び、正しい置換を選ぶ確率は $1/30$ 。よって $(1 - P_n)/30$ 。
- (4) 前 2 項を足して $P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{30}$ 。
- (5) $P_{n+1} - 1/10 = (2/3)(P_n - 1/10)$ で、 $P_1 - 1/10 = -1/15$ 。したがって

$$P_n = -\frac{1}{15} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{10}.$$