

上智大学 2014 年度 経営学科数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

負の実数 a に対して

$$f(x) = a \sin 2x - \sin x + \cos x$$

とする。

- (1) $t = -\sin x + \cos x$ とおくと、 $f(x)$ を t で表せ。
 (2) $f(x)$ の最大値と最小値を、 a の範囲で場合分けして求めよ。

【方針】

$t^2 = 1 - \sin 2x$ から $\sin 2x$ を消去する。 $t = -\sqrt{2} \sin(x - \pi/4)$ なので範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 。上に凸の 2 次関数の頂点がこの区間に入るかを調べる。

【解答】

- (1) $\sin 2x = 1 - t^2$ より $f(x) = -at^2 + t + a$ 。
 (2) $g(t) = -at^2 + t + a$ とおく。 $a < 0$ なので上に開く放物線で、軸は $t = 1/(2a) < 0$ である。
 $-\sqrt{2}/4 < a < 0$ では軸が区間の左外にあるため、最大値は $-a + \sqrt{2}$ 、最小値は $-a - \sqrt{2}$ 。
 $a \leq -\sqrt{2}/4$ では軸が区間内に入り、最大値は $-a + \sqrt{2}$ 、最小値は $a + 1/(4a)$ である。

【第 2 問】

一辺 1 の正方形タイルと、辺の長さが 1 と 2 の長方形タイルを隙間も重なりもなく並べて、縦 2、横 n の長方形を作る。並べ方の総数を a_n とする。タイルは回転して使ってよい。例えば $a_1 = 2, a_2 = 7$ である。

- (1) a_3 を求めよ。
 (2) 右端付近の敷き方を分類することにより、 $n \geq 2$ で

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n - a_{n-1}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) a_4 を求めよ。

【方針】

右端がそろっている状態に加え、上下どちらか一方が 1 マス先へ出た 2 つの境界状態を導入する。左右対称な 2 状態の個数は等しい。右端へ置くタイルの種類で遷移を数え、補助状態を消去する。

【解答】

上下どちらか一方が 1 マス先へ出た階段状の境界を埋める並べ方の数を b_n, c_n とする。対称性から $b_n = c_n$ 。初期値は $b_1 = c_1 = 1, b_2 = c_2 = 3$ である。

- (1) 右端のタイルで分類すると $a_3 = 2a_2 + a_1 + b_2 + c_2 = 2 \cdot 7 + 2 + 3 + 3 = 22$ 。
 (2) 同じ分類から

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

後式と、添字を 1 つ下げた前式を使って b_n を消去すると $a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n - a_{n-1}$ を得る。

- (3) $a_4 = 3a_3 + a_2 - a_1 = 3 \cdot 22 + 7 - 2 = 71$ 。

【第 3 問】

2 個のさいころ A, B を投げ、出た目をそれぞれ m, n とする。座標平面上に、原点を頂点として下に凸で点 $P(m, n)$ を通る放物線 C_1 と、点 $(0, 13/2)$ を頂点として上に凸で P を通る放物線 C_2 をとる。

(1) $C_1 : y = f(x), C_2 : y = g(x)$ の方程式を求めよ。

(2) $x \geq 0$ の範囲で C_1, C_2 と y 軸に囲まれる面積を S とする。 S を m, n で表し、 S の期待値を求めよ。また $10 \leq S \leq 20$ を満たす (m, n) は何通りあるか。

(3) P における C_1, C_2 の接線を ℓ_1, ℓ_2 とする。2 直線が垂直に交わる (m, n) を求め、それぞれの直線と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

【方針】

頂点形 $ax^2 + k$ に点 P を代入する。囲まれた領域は y 軸対称な 2 放物線間の右半分なので積分する。接線の垂直条件は 2 つの微分係数の積が -1 となることを使い、さいころの目の範囲で整数解を絞る。

【解答】

(1) 点 P を代入して

$$f(x) = \frac{n}{m^2}x^2, \quad g(x) = \frac{1}{m^2}\left(n - \frac{13}{2}\right)x^2 + \frac{13}{2}.$$

(2) 2 曲線は y 軸対称だから、囲まれた全領域の半分の積分して

$$S = \frac{1}{2} \int_{-m}^m \{g(x) - f(x)\} dx = \frac{13}{3}m.$$

したがって $E[S] = (13/3)E[m] = 91/6$ 。また $10 \leq S \leq 20$ は $m = 3, 4$ に相当し、 n は 6 通りずつなので 12 通り。

(3) P での傾きは $2n/m$ と $(2n - 13)/m$ 。積が -1 となる条件を $1 \leq m, n \leq 6$ で調べると $(m, n) = (6, 2)$ のみ。接線を求めると $\ell_1 : y = (2/3)x - 2$, $\ell_2 : y = -(3/2)x + 11$ 。したがって x 軸との交点の x 座標は順に $3, 22/3$ 。