

上智大学 2014 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 初項と公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ が、初項 a_1 は整数で、 $a_1 + a_4 = 18$ であるとする。 $\{a_n\}$ の公比が整数であるとき、 $\{a_n\}$ の初項となり得る数のうち最も小さいものを求めよ。 また、 $\{a_n\}$ からつくられた無限等比級数 $a_1 + a_2 + \cdots$ が収束し、かつ公比が有理数であるとき、 a_1 とこの無限等比級数の和を求めよ。

(2) 定義域が実数全体であり値が実数である関数 $f(x)$ に関する命題 $P: x \geq 3$ ならば $f(x) < 2$ である。 P の否定となっている命題を、次の選択肢から 2 つ選べ。(a) $x < 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。(b) $x \geq 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。(c) $f(x) \geq 2$ ならば $x < 3$ である。(d) $f(x) \geq 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。(e) $f(x) < 2$ となる $x < 3$ が存在する。(f) $f(x) < 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。(g) $f(x) < 2$ ならば $x \geq 3$ である。(h) $y \geq 3$ かつ $f(y) \geq 2$ を満たす実数 y が存在する。

(3) 下図において、9つの点 $A \sim I$ のいずれか 1 つから出発し、2つの線分をたどって3つの異なる点を結ぶ方法を考える。ただし、同じ3点を通るが出発点の異なる結び方は互いに区別するものとする。

図の配置は、 A, B, C が上段、 D, E, F が中段、 G, H, I が下段にあり、隣接する点どうしは水平・垂直方向に結ばれている。さらに A, E, I は一直線上にある。

(i) A を出発点とする方法は何通りあるか。(ii) E を出発点とする方法は何通りあるか。(iii) 9つの点 $A \sim I$ のどれか 1 つから出発する方法は全部で何通りあるか。

【方針】

(1) 等比数列なので $a_4 = a_1 r^3$ とおき、 $a_1(1 + r^3) = 18$ を整数条件とともに整理する。公比が整数のときは候補を絞り、収束条件は $0 < r < 1$ で判定する。(2) 命題の否定は「前件を満たし後件を満たさない実数が存在する」である。(3) 1 歩目と 2 歩目を順に数え、出発点ごとの経路数を合計する。

【解答】

(1) 初項を a_1 、公比を $r (> 0)$ とする。条件 $a_1 + a_4 = 18$ より $a_1 + a_1 r^3 = 18$ 、 $a_1(1 + r^3) = 18$ である。

r が整数のとき、 $r > 0$ より $r = 1, 2, 3, \dots$ を考える。 $a_1 = 18/(1 + r^3)$ が整数でなければならないから、 $1 + r^3$ が 18 の正の約数である必要がある。 $r = 1$ では $a_1 = 9$ 、 $r = 2$ では $a_1 = 2$ である。 $r \geq 3$ では $1 + r^3 \geq 28$ となり不適である。よって初項となり得る最小値は 2 である。

無限等比級数が収束するには $0 < r < 1$ が必要である。また a_1 は整数、 r は有理数で、 $a_1(1 + r^3) = 18$ を満たすので、 a_1 は 10 以上 18 以下の整数に限られる。この範囲で $18/a_1 - 1$ が有理数の立方数となるのは $a_1 = 16$ のときだけで、 $r = \frac{1}{2}$ である。したがって $a_1 = 16$ 、 $a_1 + a_2 + \cdots = \frac{16}{1 - 1/2} = 32$ である。

(2)

命題 P は $\forall x \geq 3, f(x) < 2$ である。その否定は $\exists x \geq 3, f(x) \geq 2$ である。したがって該当するのは (d) と、変数名を y に替えた同値な命題 (h) である。

(3) 各点の隣接関係を整理する。 A の隣接点は B, D, E 。 B の隣接点は A, C, E 。 C の隣接点は B, F 。 D の隣接点は A, E, G 。 E の隣接点は A, B, D, F, H, I 。 F の隣接点は C, E, I 。 G の隣接点は D, H 。 H の隣接点は G, E, I 。 I の隣接点は F, H, E である。

(i) A を出発点とすると、 $A \rightarrow B$ の後は C, E の 2 通り、 $A \rightarrow D$ の後は E, G の 2 通り、 $A \rightarrow E$ の後は B, D, F, H, I の 5 通りである。したがって $2 + 2 + 5 = 9$ 通りである。

(ii) E を出発点とすると、 $E \rightarrow A$ の後は B, D の 2 通り、 $E \rightarrow B$ の後は A, C の 2 通り、 $E \rightarrow D$ の後は A, G の 2 通り、 $E \rightarrow F$ の後は C, I の 2 通り、 $E \rightarrow H$ の後は G, I の 2 通り、 $E \rightarrow I$ の後は F, H の 2 通りである。よって $2 \times 6 = 12$ 通りである。

(iii) 各点からの通り数を合計すると、 $A: 9, B: 8, C: 4, D: 8, E: 12, F: 8, G: 4, H: 8, I: 9$ であるから、 $9 + 8 + 4 + 8 + 12 + 8 + 4 + 8 + 9 = 70$ 通りである。

【第 2 問】

xyz 空間において、 xy 平面に原点 $O(0,0,0)$ で接し、中心が $C(0,0,1)$ であるような球面を S とする。点 $P(2\sqrt{3},0,3)$ に点光源をおくとき、 xy 平面上にできる S の影 S' を考える。

(1) 点 P から球面 S に引いた接線のうち接点を A とする。線分 PA の長さと、 $\angle CPA = \theta$ とするときの $\sin \theta$ を求めよ。

(2) 球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は、ある平面と球面との交わりである。その平面の中心座標と半径を求めよ。

(3) 影 S' は、 xy 平面上のある楕円の内部である。その楕円の長軸の長さを求めよ。

【方針】

点 P 、球の中心 C 、接点 A でできる直角三角形 CPA を用いて接線長と角度を求める。境界円は P と C を結ぶ方向に垂直な平面で切った円になるので、中心は CP 上にある。影の境界は、 P から xy 平面上の点への光線が球に接する条件を判別式で出し、楕円の長軸を読む。

【解答】

(1) 球面 S の半径は、中心 $C(0,0,1)$ から原点 $O(0,0,0)$ までの距離より 1 である。

P から接点 A への接線は半径 CA に垂直だから、三角形 CPA は A で直角である。まず $CP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2 + (3-1)^2} = \sqrt{12+4} = 4$ であるから、ピタゴラスの定理より $PA^2 = CP^2 - CA^2 = 4^2 - 1^2 = 15$ となり、 $PA = \sqrt{15}$ である。

また、 $\theta = \angle CPA$ とすると、直角三角形 CPA で $\sin \theta = \frac{CA}{CP} = \frac{1}{4}$ である。

(2) 光が当たる部分と影の部分の境界は、点 P から球に引いた接線が接する点の集合であるから、その接点全体はある円をなす。この円の中心は CP 上にある。

$CP = 4$ 、 $CA = 1$ より、接点円の中心は C から CP 方向へ距離 $1/4$ だけ進んだ点である。 CP の単位ベクトルは

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{2}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

だから、中心は

$$(0,0,1) + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, 0, \frac{9}{8}\right)$$

である。

半径は $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ である。

したがって、中心は $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, 0, \frac{9}{8}\right)$ 、半径は $\frac{\sqrt{15}}{4}$ である。

(3) xy 平面上の点を $(x,y,0)$ とおく。点 P とこの点を結ぶ直線が球 $X^2 + Y^2 + (Z-1)^2 = 1$ に接する条件を調べる。

直線上の点を $(2\sqrt{3},0,3) + t(x-2\sqrt{3},y,-3)$ とおくと、球との交点条件は t についての二次方程式になる。接する条件は判別式が 0 であるから、計算すると境界は $(x+2\sqrt{3})^2 + 5y^2 = 15$ となる。

したがって影 S' は、中心 $(-2\sqrt{3},0)$ 、長軸の半径 $\sqrt{15}$ 、短軸の半径 $\sqrt{3}$ の楕円の内部である。よって長軸の長さは $2\sqrt{15}$ である。

【第 3 問】

$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 3)$ とする.

- (1) 関数 $f(x)$ は, x = ある値で極大値をとり, x = ある値で極小値をとる. それぞれの値を求めよ.
 (2) $y = f(x)$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式を求めよ.
 (3) 実数からなる集合

$$A = \{x \mid f(x) > 0\}, \quad B = \{x \mid x \geq b\}$$

を考える. ただし, b は整数とする. (i) $A \subset B$ となる最大の整数 b を求めよ. (ii) $B \subset A$ となる最小の整数 b を求めよ. (iii) $b \in A$ であり, $B \subset A$ とならない整数 b は何個あるか.

【方針】

導関数を求め, 符号変化から極値を決める. 次に $x = 0$ での値と傾きを使って接線を出す. 最後に $f(x) > 0$ の範囲を増減と符号から整理し, 整数 b に対する包含関係を不等式として読み替える.

【解答】

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x - 9) = \frac{3}{4}(x - 3)(x + 1)$ である. よって臨界点は $x = -1, 3$ である.

$x < -1$ では $f'(x) > 0$, $-1 < x < 3$ では $f'(x) < 0$, $x > 3$ では $f'(x) > 0$ であるから, $x = -1$ で極大, $x = 3$ で極小である.

値は $f(-1) = \frac{1}{4}(-1 - 3 + 9 + 3) = \frac{8}{4} = 2$ $f(3) = \frac{1}{4}(27 - 27 - 27 + 3) = \frac{-24}{4} = -6$ である.

したがって, 極大値は 2, 極小値は -6 である.

(2) y 軸との交点は $x = 0$ のときで, $f(0) = \frac{3}{4}$ である. また $f'(0) = \frac{3}{4}(0 - 3)(0 + 1) = -\frac{9}{4}$ だから, 接線は $y - \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}(x - 0)$ すなわち $y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$ である.

(3) まず $f(x) = 0$ の位置を考える. $f(-3) < 0$, $f(-2) > 0$ より, 負から正に変わる根が -3 と -2 の間にある. また $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $f(4) < 0$, $f(5) > 0$ より, 正から負, 負から正に変わる根がそれぞれ $(0, 1)$ と $(4, 5)$ の間にある. したがって $A = (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty)$ の形で, $\alpha \in (-3, -2)$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (4, 5)$ である.

(i) $A \subset B = \{x \mid x \geq b\}$ となるには, A のすべての要素が b 以上であればよい. A には -2 より少し小さい数が含まれるので, 最大の整数 b は -3 である.

(ii) $B \subset A$ となるには, $x \geq b$ のすべてで $f(x) > 0$ でなければならない. $f(x) > 0$ が成り立つのは最後の根 γ より右側だけなので, b は γ 以上である必要がある. $\gamma \in (4, 5)$ より最小の整数は 5 である.

(iii) $b \in A$ である整数は, $f(b) > 0$ を満たす整数である. 整数で $f(b) > 0$ かつ $b < 5$ を満たすものは $-2, -1, 0$ の 3 個である.

よって答えは 3 個である.

【第 4 問】

(1)

$$\int_0^u te^{-t} dt$$

を求め、さらに

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt$$

を求めよ.

(2) 定義域が実数全体であり値も実数である連続関数 $f(x)$ と正の定数 a が次の 2 つの条件を満たしているとする. (i) 任意の実数 x に対して

$$\int_0^2 (3x+t)e^{-x}f(t) dt = af(x)$$

が成り立つ. (ii)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(t) dt = 1$$

が成り立つ. このとき, a と $f(x) = (3Ax+B)e^{kx}$ の形を求めよ. ただし A, B, k も求めよ.

【方針】

(1) は部分積分で直接計算する. (2) は条件 (i) の左辺を x について整理して関数形を特定し, 条件 (ii) で定数を決める. 最後に得られた式を条件 (i) へ代入して整合を確認する.

【解答】

(1) 部分積分を用いる.

$$\int te^{-t} dt$$

で, $u = t$, $dv = e^{-t}dt$ とすると, $du = dt$, $v = -e^{-t}$ より

$$\int te^{-t} dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + C$$

である. したがって

$$\int_0^u te^{-t} dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^u = 1 - (u+1)e^{-u}$$

である. よって

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt = 1$$

である.

(2)

$$I_0 = \int_0^2 f(t) dt, \quad I_1 = \int_0^2 tf(t) dt$$

とおく. 条件 (i) は $e^{-x}(3I_0x + I_1) = af(x)$ だから $f(x) = (ux+v)e^{-x}$, $u = \frac{3I_0}{a}$, $v = \frac{I_1}{a}$ と書ける. 条件 (ii) と (1) より

$$\int_0^\infty (ut+v)e^{-t} dt = u+v=1.$$

$E = e^2$ とおくと $I_0 = 1 - E^{-1} - 2uE^{-1}$, $I_1 = 1 - 3E^{-1} + u(1 - 7E^{-1})$. また $au = 3I_0$, $av = I_1$ なので, $v = 1 - u$ を用いて消去すると $(13-E)u^2 - 4Eu + 3(E-1) = 0$. $a > 0$ となる解は $u = \frac{2E - \sqrt{7E^2 - 42E + 39}}{13-E}$ である. したがって

て $A = \frac{u}{3}$, $B = 1 - u$, $k = -1$, $a = \frac{3(1 - E^{-1} - 2uE^{-1})}{u}$, $f(x) = (ux + 1 - u)e^{-x}$. これらを I_0, I_1 の定義へ戻すと, 条件 (i)(ii) をともに満たす.