

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2014 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) 初項と公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ が、初項 a_1 は整数で、 $a_1 + a_4 = 18$ であるとする。 $\{a_n\}$ の公比が整数であるとき、 $\{a_n\}$ の初項となり得る数のうち最も小さいものを求めよ。また、 $\{a_n\}$ からつくられた無限等比級数 $a_1 + a_2 + \cdots$ が収束し、かつ公比が有理数であるとき、 a_1 とこの無限等比級数の和を求めよ。

(2) 定義域が実数全体であり値が実数である関数 $f(x)$ に関する命題 $P: x \geq 3$ ならば $f(x) < 2$ である。 P の否定となっている命題を、次の選択肢から 2 つ選べ。(a) $x < 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。(b) $x \geq 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。(c) $f(x) \geq 2$ ならば $x < 3$ である。(d) $f(x) \geq 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。(e) $f(x) < 2$ となる $x < 3$ が存在する。(f) $f(x) < 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。(g) $f(x) < 2$ ならば $x \geq 3$ である。(h) $y \geq 3$ かつ $f(y) \geq 2$ を満たす実数 y が存在する。

(3) 下図において、9 つの点 $A \sim I$ のいずれか 1 つから出発し、2 つの線分をたどって 3 つの異なる点を結ぶ方法を考える。ただし、同じ 3 点を通るが出発点の異なる結び方は互いに区別するものとする。

図の配置は、 A, B, C が上段、 D, E, F が中段、 G, H, I が下段にあり、隣接する点どうしは水平・垂直方向に結ばれている。さらに A, E, I は一直線上にある。

(i) A を出発点とする方法は何通りあるか。(ii) E を出発点とする方法は何通りあるか。(iii) 9 つの点 $A \sim I$ のどれか 1 つから出発する方法は全部で何通りあるか。

第 2 問

xyz 空間において, xy 平面に原点 $O(0, 0, 0)$ で接し, 中心が $C(0, 0, 1)$ であるような球面を S とする. 点 $P(2\sqrt{3}, 0, 3)$ に点光源をおくとき, xy 平面上にできる S の影 S' を考える.

- (1) 点 P から球面 S に引いた接線のうち接点を A とする. 線分 PA の長さと, $\angle CPA = \theta$ とするときの $\sin \theta$ を求めよ.
- (2) 球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は, ある平面と球面との交わりである. その平面の中心座標と半径を求めよ.
- (3) 影 S' は, xy 平面上のある楕円の内部である. その楕円の長軸の長さを求めよ.

第 3 問

$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 3)$ とする.

(1) 関数 $f(x)$ は, $x =$ ある値で極大値をとり, $x =$ ある値で極小値をとる. それぞれの値を求めよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式を求めよ.

(3) 実数からなる集合

$$A = \{x \mid f(x) > 0\}, \quad B = \{x \mid x \geq b\}$$

を考える. ただし, b は整数とする. (i) $A \subset B$ となる最大の整数 b を求めよ. (ii) $B \subset A$ となる最小の整数 b を求めよ. (iii) $b \in A$ であり, $B \subset A$ とならない整数 b は何個あるか.

第 4 問

(1)

$$\int_0^u te^{-t} dt$$

を求め、さらに

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt$$

を求めよ.

(2) 定義域が実数全体であり値も実数である連続関数 $f(x)$ と正の定数 a が次の 2 つの条件を満たしているとする. (i) 任意の実数 x に対して

$$\int_0^2 (3x+t)e^{-x}f(t) dt = af(x)$$

が成り立つ. (ii)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(t) dt = 1$$

が成り立つ. このとき, a と $f(x) = (3Ax+B)e^{kx}$ の形を求めよ. ただし A, B, k も求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)