

上智大学 2014 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 初項と公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ が、初項 a_1 は整数で、 $a_1 + a_4 = 18$ であるとする。 $\{a_n\}$ の公比が整数であるとき、 $\{a_n\}$ の初項となり得る数のうち最も小さいものを求めよ。 また、 $\{a_n\}$ からつくられた無限等比級数 $a_1 + a_2 + \dots$ が収束し、かつ公比が有理数であるとき、 a_1 とこの無限等比級数の和を求めよ。

(2) 定義域が実数全体であり値が実数である関数 $f(x)$ に関する命題 $P: x \geq 3$ ならば $f(x) < 2$ である。 P の否定となっている命題を、次の選択肢から 2 つ選べ。(a) $x < 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。(b) $x \geq 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。(c) $f(x) \geq 2$ ならば $x < 3$ である。(d) $f(x) \geq 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。(e) $f(x) < 2$ となる $x < 3$ が存在する。(f) $f(x) < 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。(g) $f(x) < 2$ ならば $x \geq 3$ である。(h) $y \geq 3$ かつ $f(y) \geq 2$ を満たす実数 y が存在する。

(3) 下図において、9 つの点 $A \sim I$ のいずれか 1 つから出発し、2 つの線分をたどって 3 つの異なる点を結ぶ方法を考える。ただし、同じ 3 点を通るが出発点の異なる結び方は互いに区別するものとする。

図の配置は、 A, B, C が上段、 D, E, F が中段、 G, H, I が下段にあり、隣接する点どうしは水平・垂直方向に結ばれている。さらに A, E, I は一直線上にある。

(i) A を出発点とする方法は何通りあるか。(ii) E を出発点とする方法は何通りあるか。(iii) 9 つの点 $A \sim I$ のどれか 1 つから出発する方法は全部で何通りあるか。

【方針】

(1) 等比数列なので $a_4 = a_1 r^3$ とおき、 $a_1(1 + r^3) = 18$ を整数条件とともに整理する。公比が整数のときは候補を絞り、収束条件は $0 < r < 1$ で判定する。(2) 命題の否定は「前件を満たし後件を満たさない実数が存在する」である。(3) 1 歩目と 2 歩目を順に数え、出発点ごとの経路数を合計する。

【解答】

(1) 初項を a_1 、公比を $r (> 0)$ とする。条件 $a_1 + a_4 = 18$ より $a_1 + a_1 r^3 = 18$ 、 $a_1(1 + r^3) = 18$ である。

r が整数のとき、 $r > 0$ より $r = 1, 2, 3, \dots$ を考える。 $a_1 = 18/(1 + r^3)$ が整数でなければならないから、 $1 + r^3$ が 18 の正の約数である必要がある。 $r = 1$ では $a_1 = 9$ 、 $r = 2$ では $a_1 = 2$ である。 $r \geq 3$ では $1 + r^3 \geq 28$ となり不適である。よって初項となり得る最小値は 2 である。

無限等比級数が収束するには $0 < r < 1$ が必要である。また a_1 は整数、 r は有理数で、 $a_1(1 + r^3) = 18$ を満たすので、 a_1 は 10 以上 18 以下の整数に限られる。この範囲で $18/a_1 - 1$ が有理数の立方数となるのは $a_1 = 16$ のときだけで、 $r = \frac{1}{2}$ である。したがって $a_1 = 16$ 、 $a_1 + a_2 + \dots = \frac{16}{1 - 1/2} = 32$ である。

(2)

命題 P は $\forall x \geq 3, f(x) < 2$ である。その否定は $\exists x \geq 3, f(x) \geq 2$ である。したがって該当するのは (d) と、変数名を y に替えた同値な命題 (h) である。

(3) 各点の隣接関係を整理する。 A の隣接点は B, D, E 。 B の隣接点は A, C, E 。 C の隣接点は B, F 。 D の隣接点は A, E, G 。 E の隣接点は A, B, D, F, H, I 。 F の隣接点は C, E, I 。 G の隣接点は D, H 。 H の隣接点は G, E, I 。 I の隣接点は F, H, E である。

(i) A を出発点とすると、 $A \rightarrow B$ の後は C, E の 2 通り、 $A \rightarrow D$ の後は E, G の 2 通り、 $A \rightarrow E$ の後は B, D, F, H, I の 5 通りである。したがって $2 + 2 + 5 = 9$ 通りである。

(ii) E を出発点とすると、 $E \rightarrow A$ の後は B, D の 2 通り、 $E \rightarrow B$ の後は A, C の 2 通り、 $E \rightarrow D$ の後は A, G の 2 通り、 $E \rightarrow F$ の後は C, I の 2 通り、 $E \rightarrow H$ の後は G, I の 2 通り、 $E \rightarrow I$ の後は F, H の 2 通りである。よって $2 \times 6 = 12$ 通りである。

(iii) 各点からの通り数を合計すると、 $A: 9, B: 8, C: 4, D: 8, E: 12, F: 8, G: 4, H: 8, I: 9$ であるから、 $9 + 8 + 4 + 8 + 12 + 8 + 4 + 8 + 9 = 70$ 通りである。

【総評】 第 1 問は等比数列の条件式から整数解と収束条件を切り分け、再度有理数公比の候補を確認した。命題の否定は存在命題に直して論理式の向きを点検し、経路数え上げは各点の隣接関係を一覧化して重複なく合計した。

【第 2 問】

xyz 空間において、 xy 平面に原点 $O(0,0,0)$ で接し、中心が $C(0,0,1)$ であるような球面を S とする。点 $P(2\sqrt{3},0,3)$ に点光源をおくとき、 xy 平面上にできる S の影 S' を考える。

(1) 点 P から球面 S に引いた接線のうち接点を A とする。線分 PA の長さと、 $\angle CPA = \theta$ とするときの $\sin \theta$ を求めよ。

(2) 球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は、ある平面と球面との交わりである。その平面の中心座標と半径を求めよ。

(3) 影 S' は、 xy 平面上のある楕円の内部である。その楕円の長軸の長さを求めよ。

【方針】

点 P 、球の中心 C 、接点 A でできる直角三角形 CPA を用いて接線長と角度を求める。境界円は P と C を結ぶ方向に垂直な平面で切った円になるので、中心は CP 上にある。影の境界は、 P から xy 平面上の点への光線が球に接する条件を判別式で出し、楕円の長軸を読む。

【解答】

(1) 球面 S の半径は、中心 $C(0,0,1)$ から原点 $O(0,0,0)$ までの距離より 1 である。

P から接点 A への接線は半径 CA に垂直だから、三角形 CPA は A で直角である。まず $CP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2 + (3-1)^2} = \sqrt{12+4} = 4$ であるから、ピタゴラスの定理より $PA^2 = CP^2 - CA^2 = 4^2 - 1^2 = 15$ となり、 $PA = \sqrt{15}$ である。

また、 $\theta = \angle CPA$ とすると、直角三角形 CPA で $\sin \theta = \frac{CA}{CP} = \frac{1}{4}$ である。

(2) 光が当たる部分と影の部分の境界は、点 P から球に引いた接線が接する点の集合であるから、その接点全体はある円をなす。この円の中心は CP 上にある。

$CP = 4$ 、 $CA = 1$ より、接点円の中心は C から CP 方向へ距離 $1/4$ だけ進んだ点である。 CP の単位ベクトルは

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{2}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

だから、中心は

$$(0,0,1) + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, 0, \frac{9}{8}\right)$$

である。

半径は $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ である。

したがって、中心は $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, 0, \frac{9}{8}\right)$ 、半径は $\frac{\sqrt{15}}{4}$ である。

(3) xy 平面上の点を $(x,y,0)$ とおく。点 P とこの点を結ぶ直線が球 $X^2 + Y^2 + (Z-1)^2 = 1$ に接する条件を調べる。

直線上の点を $(2\sqrt{3},0,3) + t(x-2\sqrt{3},y,-3)$ とおくと、球との交点条件は t についての二次方程式になる。接する条件は判別式が 0 であるから、計算すると境界は $(x+2\sqrt{3})^2 + 5y^2 = 15$ となる。

したがって影 S' は、中心 $(-2\sqrt{3},0)$ 、長軸の半径 $\sqrt{15}$ 、短軸の半径 $\sqrt{3}$ の楕円の内部である。よって長軸の長さは $2\sqrt{15}$ である。

【総評】 接線長は直角三角形 CPA を作れば一気に出るが、 $\sin \theta$ は角の位置を取り違えないことが重要である。境界円は球の中心 C から P 方向にあることを確認し、影の楕円は直線と球の接触条件を判別式で処理して中心と軸の長さを再確認した。

【第 3 問】

$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 3)$ とする.

- (1) 関数 $f(x)$ は, $x =$ ある値で極大値をとり, $x =$ ある値で極小値をとる. それぞれの値を求めよ.
 (2) $y = f(x)$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式を求めよ.
 (3) 実数からなる集合

$$A = \{x \mid f(x) > 0\}, \quad B = \{x \mid x \geq b\}$$

を考える. ただし, b は整数とする. (i) $A \subset B$ となる最大の整数 b を求めよ. (ii) $B \subset A$ となる最小の整数 b を求めよ. (iii) $b \in A$ であり, $B \subset A$ とならない整数 b は何個あるか.

【方針】

導関数を求め, 符号変化から極値を決める. 次に $x = 0$ での値と傾きを使って接線を出す. 最後に $f(x) > 0$ の範囲を増減と符号から整理し, 整数 b に対する包含関係を不等式として読み替える.

【解答】

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x - 9) = \frac{3}{4}(x-3)(x+1)$ である. よって臨界点は $x = -1, 3$ である.

$x < -1$ では $f'(x) > 0$, $-1 < x < 3$ では $f'(x) < 0$, $x > 3$ では $f'(x) > 0$ であるから, $x = -1$ で極大, $x = 3$ で極小である.

値は $f(-1) = \frac{1}{4}(-1 - 3 + 9 + 3) = \frac{8}{4} = 2$ $f(3) = \frac{1}{4}(27 - 27 - 27 + 3) = \frac{-24}{4} = -6$ である.

したがって, 極大値は 2, 極小値は -6 である.

(2) y 軸との交点は $x = 0$ のときで, $f(0) = \frac{3}{4}$ である. また $f'(0) = \frac{3}{4}(0-3)(0+1) = -\frac{9}{4}$ だから, 接線は $y - \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}(x-0)$ すなわち $y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$ である.

(3) まず $f(x) = 0$ の位置を考える. $f(-3) < 0$, $f(-2) > 0$ より, 負から正に変わる根が -3 と -2 の間にある. また $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $f(4) < 0$, $f(5) > 0$ より, 正から負, 負から正に変わる根がそれぞれ $(0, 1)$ と $(4, 5)$ の間にある. したがって $A = (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty)$ の形で, $\alpha \in (-3, -2)$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (4, 5)$ である.

(i) $A \subset B = \{x \mid x \geq b\}$ となるには, A のすべての要素が b 以上であればよい. A には -2 より少し小さい数が含まれるので, 最大の整数 b は -3 である.

(ii) $B \subset A$ となるには, $x \geq b$ のすべてで $f(x) > 0$ でなければならない. $f(x) > 0$ が成り立つのは最後の根 γ より右側だけなので, b は γ 以上である必要がある. $\gamma \in (4, 5)$ より最小の整数は 5 である.

(iii) $b \in A$ である整数は, $f(b) > 0$ を満たす整数である. 整数で $f(b) > 0$ かつ $b < 5$ を満たすものは $-2, -1, 0$ の 3 個である.

よって答えは 3 個である.

【総評】 導関数の因数分解で増減を正確に押さえると, 極値と接線は短時間で処理できる. 符号の問題では, 根そのものを厳密に求めなくても, 整数点での符号を十分に調べれば区間構造を確定できる. ただし $A \subset B$ と $B \subset A$ は向きが逆なので, どちらが右側全体を含む条件かを混同しないことが重要である.

【第 4 問】

(1)

$$\int_0^u te^{-t} dt$$

を求め、さらに

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt$$

を求めよ.

(2) 定義域が実数全体であり値も実数である連続関数 $f(x)$ と正の定数 a が次の 2 つの条件を満たしているとする. (i) 任意の実数 x に対して

$$\int_0^2 (3x+t)e^{-x}f(t) dt = af(x)$$

が成り立つ. (ii)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(t) dt = 1$$

が成り立つ. このとき, a と $f(x) = (3Ax+B)e^{kx}$ の形を求めよ. ただし A, B, k も求めよ.

【方針】

(1) は部分積分で直接計算する. (2) は条件 (i) の左辺を x について整理して関数形を特定し, 条件 (ii) で定数を決める. 最後に得られた式を条件 (i) へ代入して整合を確認する.

【解答】

(1) 部分積分を用いる.

$$\int te^{-t} dt$$

で, $u = t$, $dv = e^{-t}dt$ とすると, $du = dt$, $v = -e^{-t}$ より

$$\int te^{-t} dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + C$$

である. したがって

$$\int_0^u te^{-t} dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^u = 1 - (u+1)e^{-u}$$

である. よって

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt = 1$$

である.

(2)

$$I_0 = \int_0^2 f(t) dt, \quad I_1 = \int_0^2 tf(t) dt$$

とおく. 条件 (i) は $e^{-x}(3I_0x + I_1) = af(x)$ だから $f(x) = (ux+v)e^{-x}$, $u = \frac{3I_0}{a}$, $v = \frac{I_1}{a}$ と書ける. 条件 (ii) と (1) より

$$\int_0^\infty (ut+v)e^{-t} dt = u+v=1.$$

$E = e^2$ とおくと $I_0 = 1 - E^{-1} - 2uE^{-1}$, $I_1 = 1 - 3E^{-1} + u(1 - 7E^{-1})$. また $au = 3I_0$, $av = I_1$ なので, $v = 1 - u$ を用いて消去すると $(13-E)u^2 - 4Eu + 3(E-1) = 0$. $a > 0$ となる解は $u = \frac{2E - \sqrt{7E^2 - 42E + 39}}{13-E}$ である. したがって

て $A = \frac{u}{3}$, $B = 1 - u$, $k = -1$, $a = \frac{3(1 - E^{-1} - 2uE^{-1})}{u}$, $f(x) = (ux + 1 - u)e^{-x}$. これらを I_0, I_1 の定義へ戻すと, 条件 (i)(ii) をともに満たす.

【総評】 第 4 問は, (1) で部分積分の符号と初期値を丁寧に確認し, (2) では条件 (i) から左辺を x の一次式に整理して指数因子を読み取るのが要点である。最後に条件 (ii) で正規化し, 得られた関数を条件 (i) へ戻して整合を再確認した。