

上智大学 2015 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) $\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7}$ であることを用いて、 7^4 は何桁の整数であるか。また、 $7^2 < 50$ であることと $\log_{10} 2 > \frac{3}{10}$ であることを用いて、 $\log_{10} 7$ の上からの評価を求め、これより 7^{41} は何桁の整数であるかを答えよ。

(2) $\log_{10} 15$ に最も近い値、 $\log_{10} 17$ に最も近い値、 $\log_{10} 19$ に最も近い値を、近似値 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてそれぞれ求めよ。

【方針】

桁数は $n \log_{10} 7$ の整数部分から求める。まず与えられた不等式をそのまま使い、 7^4 については $4 \log_{10} 7$ の範囲を挟んで桁数を決める。 7^{41} は、 $7^2 < 50$ と $\log_{10} 2 > 3/10$ から $\log_{10} 7$ を上から評価し、 $41 \log_{10} 7$ の範囲を定める。第 (2) 問は、15, 17, 19 を 10 と 2, 3 の組合せで表し、常用対数の加法性で近似する。

【解答】

(1) 7^4 の桁数は、 $3 < 4 \log_{10} 7 < 4$ なら 4 桁である。実際、 $\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7}$ より $4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{3} > 3$, $4 \cdot \frac{6}{7} = \frac{24}{7} < 4$ だから $3 < 4 \log_{10} 7 < 4$ が成り立つ。したがって 7^4 は 4 桁の整数である。

次に 7^{41} について、 $7^2 < 50$ より $\log_{10} 7 < \frac{1}{2} \log_{10} 50 = \frac{1}{2}(\log_{10} 5 + 1)$ 。また $\log_{10} 2 > \frac{3}{10}$ なので $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 < 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ 。よって $\log_{10} 7 < \frac{1}{2} \left(\frac{7}{10} + 1 \right) = \frac{17}{20}$ となる。したがって $41 \log_{10} 7 < 41 \cdot \frac{17}{20} = 34.85 < 35$ 。一方、 $\log_{10} 7 > \frac{5}{6}$ だから $41 \log_{10} 7 > 41 \cdot \frac{5}{6} = \frac{205}{6} > 34$ 。ゆえに $34 < 41 \log_{10} 7 < 35$ であり、 7^{41} は 35 桁の整数である。

(2) $\log_{10} 15 = \log_{10}(3 \cdot 5) = \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2$ より $\log_{10} 15 \approx 0.4771 + 1 - 0.3010 = 1.1761$ 。したがって最も近い値は 1.18 である。

同様に $\log_{10} 17 \approx 1.2304$ なので、最も近い値は 1.23 である。

また $\log_{10} 19 \approx 1.2788$ なので、最も近い値は 1.28 である。

以上より、

$$\log_{10} 15 \approx 1.18, \quad \log_{10} 17 \approx 1.23, \quad \log_{10} 19 \approx 1.28.$$

【第 2 問】

正の実数 a に対し、関数 $f(x) = \sin x + a \sin 3x$ を考える。

(1) $a = 2$ のとき、 $f(x)$ を $\sin x$ とその三乗で表せ。

(2) $x = \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が最大値をとるときの a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲より大きいとき、 $f(x)$ の最大値がもっとも小さくなるような a の値、そのときの最大値、および最大値を与える x に対する $\sin x$ の値を求めよ。

【方針】

$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ を用いて、 $s = \sin x$ の三次式に直す。最大値問題は、 $s \in [-1, 1]$ の範囲での三次関数の最大値に帰着する。 $x = \pi/2$ が最大点となる条件は、導関数の符号から決める。最後に、その最大値を a の関数として表し、その関数の最小化を行う。

【解答】

(1) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ より、 $s = \sin x$ とおくと $f(x) = \sin x + 2 \sin 3x = s + 2(3s - 4s^3) = 7s - 8s^3$ 。したがって $f(x) = 7 \sin x - 8 \sin^3 x$ である。

(2) 一般に $f(x) = \sin x + a(3 \sin x - 4 \sin^3 x) = (1+3a)s - 4as^3$ と書ける。 $g(s) = (1+3a)s - 4as^3$ とおくと、 $s \in [-1, 1]$ 上での最大値を考えればよい。

$x = \frac{\pi}{2}$ に対応するのは $s = 1$ である。 $g'(s) = 1 + 3a - 12as^2$ だから、 $[0, 1]$ で g が増加していれば最大値は $s = 1$ である。これには $g'(1) = 1 - 9a \geq 0$ が必要十分である。よって $0 < a \leq \frac{1}{9}$ である。

(3) $a > \frac{1}{9}$ のとき, $g'(s) = 0$ より内部の極大点は $s_0 = \sqrt{\frac{1+3a}{12a}}$ である。このとき最大値は $M(a) = g(s_0) = \frac{2}{3}(1+3a)s_0$ より $M(a)^2 = \frac{(1+3a)^3}{27a}$ となる。 $u = 3a$ とおくと $M(a)^2 = \frac{(1+u)^3}{9u}$. これを最小にするには $\frac{d}{du} \left(\frac{(1+u)^3}{u} \right) = 0$ より $2u - 1 = 0$ となるから $u = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{6}$. このとき $M^2 = \frac{(1+1/2)^3}{9 \cdot (1/2)} = \frac{3}{4}$ なので $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. また, 最大値を与える s は $s_0 = \sqrt{\frac{1+3a}{12a}} = \sqrt{\frac{3/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。したがって

$$a = \frac{1}{6}, \quad \max f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

【第3問】

実数からなる集合 A, B, C を次のように定める。

$$A = \left\{ x \mid \sin \frac{7\pi}{2} x > -\frac{1}{7} x \right\}, \quad B = \{ x \mid 0 < x < b \}, \quad C = \{ x \mid x \geq c \},$$

ただし, b, c は正の実数とする。

(1) -1 は A の要素か, また 5 は A の要素か。

(2) $B \cap C$ が空集合であるための必要十分条件を求めよ。

(3) $A \supset B$ となる b のうち, 整数で最大のものを求めよ。また, $A \supset C$ となる c のうち, 整数で最小のものを求めよ。

(4) 実数からなる集合 S が連結であるとは, S の任意の 2 つの要素 x, y に対して, 条件 $x < z < y$ を満たすすべての実数 z が S に属することをいう。 $A \cap B$ が連結であるような b のうち, 整数で最大のものを求めよ。また, $A \cap C$ が連結であるような c のうち, 整数で最小のものを求めよ。

【方針】

A の定義は三角関数の不等式なので, まず具体値を代入して属するかどうかを判定する。 $B \cap C = \emptyset$ は半直線と区間の位置関係なので, 端点比較で決める。 $A \supset B$ と $A \supset C$ は, A がどの範囲を含むかを見て, 整数条件として最も大きい・小さい値を確定する。連結性は, 区間が丸ごと入るかどうかで判断する。

【解答】

(1) $x = -1$ のとき

$$\sin \frac{7\pi}{2}(-1) = \sin \left(-\frac{7\pi}{2} \right) = 1, \quad -\frac{1}{7}(-1) = \frac{1}{7}$$

であるから $1 > \frac{1}{7}$ が成り立つ。よって $-1 \in A$ である。

$x = 5$ のとき $\sin \frac{35\pi}{2} = -1$, $-\frac{5}{7}$ であるから $-1 > -\frac{5}{7}$ は成り立たない。よって $5 \notin A$ である。

(2) $B = (0, b)$, $C = [c, \infty)$ であるから, $B \cap C = \emptyset$ となるのは $b \leq c$ のときである。逆に $b > c$ なら $c < x < b$ を満たす実数 x が存在して交わりは空でない。したがって必要十分条件は $b \leq c$ である。

(3) $x \geq 7$ なら $-\frac{1}{7}x \leq -1$ である。しかも $\sin \frac{7\pi}{2}x \geq -1$ だから, 実際には $x = 7$ を含めて $\sin \frac{7\pi}{2}x > -\frac{1}{7}x$ が成り立つ。よって $[7, \infty) \subset A$ である。

一方, $x = \frac{3}{7}$ では

$$\sin \frac{7\pi}{2} \cdot \frac{3}{7} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad -\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = -\frac{3}{49}$$

より不等式は成り立たない。したがって $(0, b) \subset A$ となる正の整数 b は存在しない。

また $[7, \infty) \subset A$ より, $A \supset C$ となる整数 c の最小は 7 である。

(4) $A \cap B$ が連結であるためには, $(0, b)$ のすべての点が A に入る必要があるが, そのような正の整数 b は存在しない。したがって, $A \cap B$ が連結であるような正の整数 b は存在しない。

また $A \cap C$ は $[c, \infty)$ のうち A に入る部分である。 $c \geq 7$ では $[c, \infty) \subset A$ となり, これは連結である。したがって整数で最小のものは 7 である。

【第 4 問】

xyz 空間において, xy 平面上に 4 点

$$A_1(1, 0, 0), B_1(0, 1, 0), C_1(-1, 0, 0), D_1(0, -1, 0)$$

を頂点とする正方形 $A_1B_1C_1D_1$ がある。 θ を実数とし, この正方形 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面を原点を中心とする角 θ だけ回転させた後で z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した正方形を $A_2B_2C_2D_2$ とする。点 P_1, P_2 は, それぞれ A_1, A_2 から同時に出発し, 正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ の周上を, 同じ速さで同じ向きに一周する。このとき, 線分 P_1P_2 が動いてできる曲面と正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ とで囲まれる立体を V とする。

(1) 線分 P_1P_2 の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) $0 < h < 2$ とするとき, 平面 $z = h$ による立体 V の断面は一辺の長さが一定式で表される正方形である。その一辺の長さを求め, さらにそれが最小となる h を求めよ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。

(4) θ が π に限りなく近づくとき, 立体 V の体積の極限を求めよ。

【方針】

回転後の座標を明示し, 対応する点同士を結ぶ距離を考える。点は正方形の周上の同じ周回率で対応するので, 平面内の距離は回転の差だけで決まる。断面は上下の正方形の線形補間になるから, 一辺の長さを高さの関数として求め, その二乗を積分して体積を出す。最後に $\theta \rightarrow \pi$ の極限を取る。

【解答】

(1) 回転後の頂点は $A_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $B_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 2)$, であり, 以下同様に決まる。正方形上の点を, 底面の点 $p = (x, y, 0)$ に対し, 上面では $(R_\theta p, 2)$ と表すことができる。ここで R_θ は平面内の角 θ の回転である。

このとき平面部分のずれの大きさは $|p - R_\theta p|^2 = 2|p|^2(1 - \cos \theta)$ であるから, $|P_1P_2|^2 = 4 + 2|p|^2(1 - \cos \theta)$ となる。正方形の周上では, 原点からの距離の二乗は辺の中点で $\frac{1}{2}$, 頂点で 1 をとるので $\frac{1}{2} \leq |p|^2 \leq 1$ である。したがって $|P_1P_2|_{\min} = \sqrt{5 - \cos \theta}$, $|P_1P_2|_{\max} = \sqrt{6 - 2 \cos \theta}$ である。

(2) 高さ $z = h$ の断面では, 底面と上面を結ぶ各線分を高さの比 $h : 2$ で切ることになる。したがって平面内では, 回転 R_θ と原点中心の相似変換を合わせた像になり, 断面は正方形である。

一辺の長さを $\ell(h)$ とすると, $\lambda = h/2$ とおいて

$$\ell(h)^2 = 2((1 - \lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos \theta)$$

より $\ell(h)^2 = 2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)$ となる。ゆえに $\ell(h) = \sqrt{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)}$ 。ここで $1 - \cos \theta > 0$ なので, $h^2 - 2h$ が最小となる $h = 1$ で $\ell(h)$ は最小となる。したがって最小値は $\ell(1) = \sqrt{1 + \cos \theta}$ である。

(3) 断面積は $\ell(h)^2$ だから, 体積 V は

$$V = \int_0^2 \ell(h)^2 dh = \int_0^2 (2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)) dh.$$

よって

$$V = 4 + (1 - \cos \theta) \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 4 - \frac{4}{3}(1 - \cos \theta) = \frac{8 + 4 \cos \theta}{3}.$$

(4) $\theta \rightarrow \pi$ では $\cos \theta \rightarrow -1$ だから $V \rightarrow \frac{8 + 4(-1)}{3} = \frac{4}{3}$ 。したがって極限は $\frac{4}{3}$ である。