

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2015 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) $\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7}$ であることを用いて、 7^4 は何桁の整数であるか。また、 $7^2 < 50$ であることと $\log_{10} 2 > \frac{3}{10}$ であることを用いて、 $\log_{10} 7$ の上からの評価を求め、これより 7^{41} は何桁の整数であるかを答えよ。

(2) $\log_{10} 15$ に最も近い値、 $\log_{10} 17$ に最も近い値、 $\log_{10} 19$ に最も近い値を、近似値 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてそれぞれ求めよ。

第 2 問

正の実数 a に対し、関数 $f(x) = \sin x + a \sin 3x$ を考える。

(1) $a = 2$ のとき、 $f(x)$ を $\sin x$ とその三乗で表せ。

(2) $x = \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が最大値をとるときの a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲より大きいとき、 $f(x)$ の最大値がもっとも小さくなるような a の値、そのときの最大値、および最大値を与える x に対する $\sin x$ の値を求めよ。

第 3 問

実数からなる集合 A, B, C を次のように定める。

$$A = \left\{ x \mid \sin \frac{7\pi}{2} x > -\frac{1}{7}x \right\}, \quad B = \{x \mid 0 < x < b\}, \quad C = \{x \mid x \geq c\},$$

ただし、 b, c は正の実数とする。

- (1) -1 は A の要素か、また 5 は A の要素か。
- (2) $B \cap C$ が空集合であるための必要十分条件を求めよ。
- (3) $A \supset B$ となる b のうち、整数で最大のものを求めよ。また、 $A \supset C$ となる c のうち、整数で最小のものを求めよ。
- (4) 実数からなる集合 S が連結であるとは、 S の任意の 2 つの要素 x, y に対して、条件 $x < z < y$ を満たすすべての実数 z が S に属することをいう。 $A \cap B$ が連結であるような b のうち、整数で最大のものを求めよ。また、 $A \cap C$ が連結であるような c のうち、整数で最小のものを求めよ。

第 4 問

xyz 空間において, xy 平面上に 4 点

$$A_1(1, 0, 0), B_1(0, 1, 0), C_1(-1, 0, 0), D_1(0, -1, 0)$$

を頂点とする正方形 $A_1B_1C_1D_1$ がある。 θ を実数とし, この正方形 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面を原点を中心とする角 θ だけ回転させた後で z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した正方形を $A_2B_2C_2D_2$ とする。点 P_1, P_2 は, それぞれ A_1, A_2 から同時に出発し, 正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ の周上を, 同じ速さで同じ向きに一周する。このとき, 線分 P_1P_2 が動いてできる曲面と正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ とで囲まれる立体を V とする。

- (1) 線分 P_1P_2 の長さの最大値と最小値を求めよ。
- (2) $0 < h < 2$ とするとき, 平面 $z = h$ による立体 V の断面は一辺の長さが一定式で表される正方形である。その一辺の長さを求め, さらにそれが最小となる h を求めよ。
- (3) 立体 V の体積を求めよ。
- (4) θ が π に限りなく近づくとき, 立体 V の体積の極限を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)