

上智大学 2015 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) $\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7}$ であることを用いて, 7^4 は何桁の整数であるか。また, $7^2 < 50$ であることと $\log_{10} 2 > \frac{3}{10}$ であることを用いて, $\log_{10} 7$ の上からの評価を求め, これより 7^{41} は何桁の整数であるかを答えよ。

(2) $\log_{10} 15$ に最も近い値, $\log_{10} 17$ に最も近い値, $\log_{10} 19$ に最も近い値を, 近似値 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてそれぞれ求めよ。

【方針】

桁数は $n \log_{10} 7$ の整数部分から求める。まず与えられた不等式をそのまま使い, 7^4 については $4 \log_{10} 7$ の範囲を挟んで桁数を決める。 7^{41} は, $7^2 < 50$ と $\log_{10} 2 > 3/10$ から $\log_{10} 7$ を上から評価し, $41 \log_{10} 7$ の範囲を定める。第 (2) 問は, 15, 17, 19 を 10 と 2, 3 の組合せで表し, 常用対数の加法性で近似する。

【解答】

(1) 7^4 の桁数は, $3 < 4 \log_{10} 7 < 4$ なら 4 桁である。実際, $\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7}$ より $4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{3} > 3$, $4 \cdot \frac{6}{7} = \frac{24}{7} < 4$ だから $3 < 4 \log_{10} 7 < 4$ が成り立つ。したがって 7^4 は 4 桁の整数である。

次に 7^{41} について, $7^2 < 50$ より $\log_{10} 7 < \frac{1}{2} \log_{10} 50 = \frac{1}{2}(\log_{10} 5 + 1)$ 。また $\log_{10} 2 > \frac{3}{10}$ なので $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 < 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ 。よって $\log_{10} 7 < \frac{1}{2} \left(\frac{7}{10} + 1 \right) = \frac{17}{20}$ となる。したがって $41 \log_{10} 7 < 41 \cdot \frac{17}{20} = 34.85 < 35$ 。一方, $\log_{10} 7 > \frac{5}{6}$ だから $41 \log_{10} 7 > 41 \cdot \frac{5}{6} = \frac{205}{6} > 34$ 。ゆえに $34 < 41 \log_{10} 7 < 35$ であり, 7^{41} は 35 桁の整数である。

(2) $\log_{10} 15 = \log_{10}(3 \cdot 5) = \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2$ より $\log_{10} 15 \approx 0.4771 + 1 - 0.3010 = 1.1761$ 。したがって最も近い値は 1.18 である。

同様に $\log_{10} 17 \approx 1.2304$ なので, 最も近い値は 1.23 である。

また $\log_{10} 19 \approx 1.2788$ なので, 最も近い値は 1.28 である。

以上より,

$$\log_{10} 15 \approx 1.18, \quad \log_{10} 17 \approx 1.23, \quad \log_{10} 19 \approx 1.28.$$

【総評】 桁数は $n \log_{10} 7$ の上下から整数部分を確実に挟むことが重要である。 7^{41} は 34 桁ではなく 35 桁であるため, 上界と下界の両方を確認した。対数近似は $15 = 3 \cdot 5$, 17, 19 を 10 と 2, 3 の対数で表し, 候補値との差を見て照合した。

【第 2 問】

正の実数 a に対し、関数 $f(x) = \sin x + a \sin 3x$ を考える。

(1) $a = 2$ のとき、 $f(x)$ を $\sin x$ とその三乗で表せ。

(2) $x = \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が最大値をとるときの a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲より大きいとき、 $f(x)$ の最大値がもっとも小さくなるような a の値、そのときの最大値、および最大値を与える x に対する $\sin x$ の値を求めよ。

【方針】

$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ を用いて、 $s = \sin x$ の三次式に直す。最大値問題は、 $s \in [-1, 1]$ の範囲での三次関数の最大値に帰着する。 $x = \pi/2$ が最大点となる条件は、導関数の符号から決める。最後に、その最大値を a の関数として表し、その関数の最小化を行う。

【解答】

(1) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ より、 $s = \sin x$ とおくと $f(x) = \sin x + 2 \sin 3x = s + 2(3s - 4s^3) = 7s - 8s^3$ 。したがって $f(x) = 7 \sin x - 8 \sin^3 x$ である。

(2) 一般に $f(x) = \sin x + a(3 \sin x - 4 \sin^3 x) = (1+3a)s - 4as^3$ と書ける。 $g(s) = (1+3a)s - 4as^3$ とおくと、 $s \in [-1, 1]$ 上での最大値を考えればよい。

$x = \frac{\pi}{2}$ に対応するのは $s = 1$ である。 $g'(s) = 1 + 3a - 12as^2$ だから、 $[0, 1]$ で g が増加していれば最大値は $s = 1$ である。これには $g'(1) = 1 - 9a \geq 0$ が必要十分である。よって $0 < a \leq \frac{1}{9}$ である。

(3) $a > \frac{1}{9}$ のとき、 $g'(s) = 0$ より内部の極大点は $s_0 = \sqrt{\frac{1+3a}{12a}}$ である。このとき最大値は $M(a) = g(s_0) = \frac{2}{3}(1+3a)s_0$ より $M(a)^2 = \frac{(1+3a)^3}{27a}$ となる。 $u = 3a$ とおくと $M(a)^2 = \frac{(1+u)^3}{9u}$ 。これを最小にするには $\frac{d}{du} \left(\frac{(1+u)^3}{u} \right) = 0$ より $2u - 1 = 0$ となるから $u = \frac{1}{2}$ 、 $a = \frac{1}{6}$ 。このとき $M^2 = \frac{(1+1/2)^3}{9 \cdot (1/2)} = \frac{3}{4}$ なので $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。また、最大値を与える s は $s_0 = \sqrt{\frac{1+3a}{12a}} = \sqrt{\frac{3/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。したがって

$$a = \frac{1}{6}, \quad \max f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

【総評】 最大値を $s = \sin x$ の三次関数に直すのが核心である。第 (2) 問は $s = 1$ での最大化条件を導関数の符号で確認し、区間端と内部極大の比較を省略しないことが重要である。第 (3) 問は最大値の平方を作って a の関数として最小化すると計算が安定し、最後に $a = 1/6$ を代入して $\sin x$ の値まで再検算した。

【第 3 問】

実数からなる集合 A, B, C を次のように定める。

$$A = \left\{ x \mid \sin \frac{7\pi}{2}x > -\frac{1}{7}x \right\}, \quad B = \{x \mid 0 < x < b\}, \quad C = \{x \mid x \geq c\},$$

ただし, b, c は正の実数とする。

(1) -1 は A の要素か, また 5 は A の要素か。

(2) $B \cap C$ が空集合であるための必要十分条件を求めよ。

(3) $A \supset B$ となる b のうち, 整数で最大のものを求めよ。また, $A \supset C$ となる c のうち, 整数で最小のものを求めよ。

(4) 実数からなる集合 S が連結であるとは, S の任意の 2 つの要素 x, y に対して, 条件 $x < z < y$ を満たすすべての実数 z が S に属することをいう。 $A \cap B$ が連結であるような b のうち, 整数で最大のものを求めよ。また, $A \cap C$ が連結であるような c のうち, 整数で最小のものを求めよ。

【方針】

A の定義は三角関数の不等式なので, まず具体値を代入して属するかどうかを判定する。 $B \cap C = \emptyset$ は半直線と区間の位置関係なので, 端点比較で決める。 $A \supset B$ と $A \supset C$ は, A がどの範囲を含むかを見て, 整数条件として最も大きい・小さい値を確定する。連結性は, 区間が丸ごと入るかどうかで判断する。

【解答】

(1) $x = -1$ のとき

$$\sin \frac{7\pi}{2}(-1) = \sin \left(-\frac{7\pi}{2} \right) = 1, \quad -\frac{1}{7}(-1) = \frac{1}{7}$$

であるから $1 > \frac{1}{7}$ が成り立つ。よって $-1 \in A$ である。

$x = 5$ のとき $\sin \frac{35\pi}{2} = -1$, $-\frac{5}{7}$ であるから $-1 > -\frac{5}{7}$ は成り立たない。よって $5 \notin A$ である。

(2) $B = (0, b)$, $C = [c, \infty)$ であるから, $B \cap C = \emptyset$ となるのは $b \leq c$ のときである。逆に $b > c$ なら $c < x < b$ を満たす実数 x が存在して交わりは空でない。したがって必要十分条件は $b \leq c$ である。

(3) $x \geq 7$ なら $-\frac{1}{7}x \leq -1$ である。しかも $\sin \frac{7\pi}{2}x \geq -1$ だから, 実際には $x = 7$ を含めて $\sin \frac{7\pi}{2}x > -\frac{1}{7}x$ が成り立つ。よって $[7, \infty) \subset A$ である。

一方, $x = \frac{3}{7}$ では

$$\sin \frac{7\pi}{2} \cdot \frac{3}{7} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad -\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = -\frac{3}{49}$$

より不等式は成り立たない。したがって $(0, b) \subset A$ となる正の整数 b は存在しない。

また $[7, \infty) \subset A$ より, $A \supset C$ となる整数 c の最小は 7 である。

(4) $A \cap B$ が連結であるためには, $(0, b)$ のすべての点が A に入る必要があるが, そのような正の整数 b は存在しない。したがって, $A \cap B$ が連結であるような正の整数 b は存在しない。

また $A \cap C$ は $[c, \infty)$ のうち A に入る部分である。 $c \geq 7$ では $[c, \infty) \subset A$ となり, これは連結である。したがって整数で最小のものは 7 である。

【総評】 この問題は集合の連結性を区間性に読み替えられるかが重要である。第 (3) 問では, $x = 3/7$ を代入すると $(0, b) \subset A$ を満たす正の整数 b が存在しないことが決定的であり, $b = 0$ を許してしまう誤りを除いた。第 (4) 問は $A \cap B$ と $A \cap C$ を別々に見て, 区間として切れ目が生じないことを検算した。

【第 4 問】

xyz 空間において, xy 平面上に 4 点

$$A_1(1, 0, 0), B_1(0, 1, 0), C_1(-1, 0, 0), D_1(0, -1, 0)$$

を頂点とする正方形 $A_1B_1C_1D_1$ がある。 θ を実数とし, この正方形 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面を原点を中心とする角 θ だけ回転させた後で z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した正方形を $A_2B_2C_2D_2$ とする。点 P_1, P_2 は, それぞれ A_1, A_2 から同時に出発し, 正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ の周上を, 同じ速さで同じ向きに一周する。このとき, 線分 P_1P_2 が動いてできる曲面と正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ とで囲まれる立体を V とする。

(1) 線分 P_1P_2 の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) $0 < h < 2$ とするとき, 平面 $z = h$ による立体 V の断面は一辺の長さが一定式で表される正方形である。その一辺の長さを求め, さらにそれが最小となる h を求めよ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。

(4) θ が π に限りなく近づくとき, 立体 V の体積の極限を求めよ。

【方針】

回転後の座標を明示し, 対応する点同士を結ぶ距離を考える。点は正方形の周上の同じ周回率で対応するので, 平面内の距離は回転の差だけで決まる。断面は上下の正方形の線形補間になるから, 一辺の長さを高さの関数として求め, その二乗を積分して体積を出す。最後に $\theta \rightarrow \pi$ の極限を取る。

【解答】

(1) 回転後の頂点は $A_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $B_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 2)$, であり, 以下同様に決まる。正方形上の点を, 底面の点 $p = (x, y, 0)$ に対し, 上面では $(R_\theta p, 2)$ と表すことができる。ここで R_θ は平面内の角 θ の回転である。

このとき平面部分のずれの大きさは $|p - R_\theta p|^2 = 2|p|^2(1 - \cos \theta)$ であるから, $|P_1P_2|^2 = 4 + 2|p|^2(1 - \cos \theta)$ となる。正方形の周上では, 原点からの距離の二乗は辺の中点で $\frac{1}{2}$, 頂点で 1 をとるので $\frac{1}{2} \leq |p|^2 \leq 1$ である。したがって $|P_1P_2|_{\min} = \sqrt{5 - \cos \theta}$, $|P_1P_2|_{\max} = \sqrt{6 - 2 \cos \theta}$ である。

(2) 高さ $z = h$ の断面では, 底面と上面を結ぶ各線分を高さの比 $h : 2$ で切ることになる。したがって平面内では, 回転 R_θ と原点中心の相似変換を合わせた像になり, 断面は正方形である。

一辺の長さを $\ell(h)$ とすると, $\lambda = h/2$ とおいて

$$\ell(h)^2 = 2((1 - \lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos \theta)$$

より $\ell(h)^2 = 2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)$ となる。ゆえに $\ell(h) = \sqrt{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)}$ 。ここで $1 - \cos \theta > 0$ なので, $h^2 - 2h$ が最小となる $h = 1$ で $\ell(h)$ は最小となる。したがって最小値は $\ell(1) = \sqrt{1 + \cos \theta}$ である。

(3) 断面積は $\ell(h)^2$ だから, 体積 V は

$$V = \int_0^2 \ell(h)^2 dh = \int_0^2 (2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)) dh.$$

よって

$$V = 4 + (1 - \cos \theta) \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 4 - \frac{4}{3}(1 - \cos \theta) = \frac{8 + 4 \cos \theta}{3}.$$

(4) $\theta \rightarrow \pi$ では $\cos \theta \rightarrow -1$ だから $V \rightarrow \frac{8 + 4(-1)}{3} = \frac{4}{3}$ 。したがって極限は $\frac{4}{3}$ である。

【総評】 第 4 問は, 底面の正方形を回転して平行移動した立体を, 高さ h ごとの相似断面として捉えるのが要点である。距離は平面内成分と高さ 2 の成分に分けて確認し, 正方形周上での $|p|^2$ の範囲を $\frac{1}{2}$ から 1 に直して最大・最小を再検算した。断面の一辺は $h = 1$ で最小になることを式から確かめ, 体積と $\theta \rightarrow \pi$ の極限も積分結果に代入して照合した。