

上智大学 2015 年度 TEAP1 数学 (AM)

解答

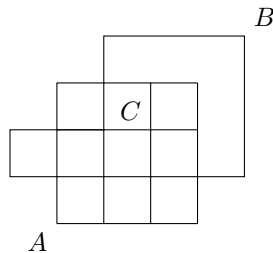
全 3 問

【第 1 問】

(1) $f(x) = 4x^3 - 12x + 1$ ($-1 \leq x \leq \sqrt{3}$) のグラフと直線 $y = -3x + k$ が異なる 2 つの共有点をもつための k の必要十分条件を求めよ。

(2) 不等式 $9^{\log_3 x} - 3 \cdot 2^{\log_2 x+2} + 3^3 > 0$ を解け。

(3) 図の道路網で A から B まで最短距離で進む。



(i) C を経由する道順は何通りか。

(ii) C を経由するとは限らない道順は全部で何通りか。

【方針】

(1) 交点条件を $4x^3 - 9x + 1 = k$ の水平線との交点数へ直し、定義域の端点と極値を比較する。(2) 対数の定義域を確認して x の 2 次不等式へ変形する。(3) 各交差点までの最短路の本数を順に書き込む。

【解答】

(1) 共有点の x 座標は $F(x) = 4x^3 - 9x + 1 = k$ の解である。 $F'(x) = 12x^2 - 9$ なので、極大点は $x = -\sqrt{3}/2$ 、極小点は $x = \sqrt{3}/2$ である。端点と極値での値は

$$F(-1) = 6, \quad F(-\sqrt{3}/2) = 1 + 3\sqrt{3}, \quad F(\sqrt{3}/2) = 1 - 3\sqrt{3}, \quad F(\sqrt{3}) = 1 + 3\sqrt{3}.$$

したがって異なる 2 交点をもつ必要十分条件は $k = 1 + 3\sqrt{3}$ 、または $1 - 3\sqrt{3} < k < 6$ である。

(2) 真数条件は $x > 0$ 。対数の性質から $9^{\log_3 x} = x^2$, $2^{\log_2 x+2} = 4x$ なので、不等式は $x^2 - 12x + 27 = (x-3)(x-9) > 0$ となる。よって $0 < x < 3$ 、または $9 < x$ 。

(3) 各交差点に最短路の本数を書き込むと、 A から C まで 9 通り、 C から B まで 6 通りである。したがって (i) は $9 \cdot 6 = 54$ 通り。(ii) は道路網全体で同じ加法を続けると 107 通りとなる。

【第 2 問】

- (1) 不定方程式 $41x + 355y = 1$ について、 $0 < x < 100$ を満たす整数解を求めよ。
- (2) 25 g までの普通郵便と簡易書留をそれぞれ何通か出したところ、料金の合計が 5000 円となった。1 通の料金を普通郵便 82 円、簡易書留 710 円とすると、それぞれ何通か。
- (3) 82 円切手と 205 円切手を組み合わせて支払える 6100 円以上 6110 円未満の金額の一の位、組合せの総数、切手枚数が最小となる組、および 2 種類の枚数差が最小となる組を求めよ。

【方針】

(1) 一般解を作り、 x の範囲でパラメータを絞る。(2) 料金式を 41 で割り、5 と 10 の倍数条件を順に使う。(3) 範囲内の 41 の倍数を確定し、非負整数解を 1 変数で表す。

【解答】

- (1) $355 = 41 \cdot 8 + 27$ から $x = (1 - 355y)/41 = (1 - 27y)/41 - 8y$ と表せる。 $0 < x < 100$ を満たすには $-11 \leq y \leq 0$ であり、 $(1 - 27y)/41$ が整数となるのは $y = -3$ のときだけである。したがって $(x, y) = (26, -3)$ 。
- (2) 普通郵便を x 通、簡易書留を y 通とすると $82x + 710y = 5000$ 。左辺の形から $x = 5x'$ 、さらに $x' + y = 10z$ とおける。整理すると $3y + 41z = 50$ となるため、非負整数解は $y = 3, z = 1$ のみで、 $x' = 7$ 。よって普通郵便 35 通、簡易書留 3 通。
- (3) 合計額は $41(2x + 5y)$ 円なので、該当額は 6109 円だけで、一の位は 9 である。方程式は $2x + 5y = 149$ 。 $y = 2u + 1$ とおくと $x = 5v + 2$ 、 $u + v = 14$ となり、 $v = 0, 1, \dots, 14$ の 15 通り。切手総数は $x + y = 31 + 3v$ なので最小は $(x, y) = (2, 29)$ 。枚数差は $|x - y| = |7v - 27|$ なので、最小は $v = 4$ のときの $(x, y) = (22, 21)$ である。

【第 3 問】

製品 X, Y をそれぞれ x, y kg 生産する。 X 1 kg には原料 A, B, C が 1, 4, 1 kg、 Y 1 kg には 3, 3, 2 kg 必要である。在庫は $A = 23$ kg、 $B = 47$ kg、 $C = c$ kg で、利益は X 1 kg あたり p 万円、 Y 1 kg あたり q 万円とする。ただし $c, p, q > 0$ 。

- (1) $c = 17, p = 2, q = 5$ のとき、利益を最大にする (x, y) を求めよ。
- (2) $c = 17$ のとき、最大利益を与える (x, y) がただ 1 組に定まるための p/q の必要十分条件を求めよ。
- (3) 生産量にかかわらず原料 C が余るための c の必要十分条件を求めよ。

【方針】

在庫条件を半平面として描き、許容領域の頂点を求める。利益直線の傾きが上側境界の傾きと一致する場合を除いて一意性を判定する。(3) は $x + 2y$ の最大値を求める。

【解答】

$c = 17$ の許容条件は

$$x + 3y \leq 23, \quad 4x + 3y \leq 47, \quad x + 2y \leq 17, \quad x, y \geq 0.$$

上側境界の折点は $(0, 23/3), (5, 6), (8, 5), (47/4, 0)$ である。

- (1) 利益直線 $2x + 5y = k$ を上へ動かすと $(5, 6)$ で最後に接する。よって $X = 5$ kg、 $Y = 6$ kg。
- (2) 利益直線の傾き $-p/q$ が境界の傾き $-1/3, -1/2, -4/3$ と一致すると最大点が線分全体となる。したがって必要十分条件は

$$0 < \frac{p}{q} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3} < \frac{p}{q}$$

のいずれかである。

- (3) $x + 2y$ の最大値は、直線 $x + 2y = k$ が在庫 A, B だけで決まる領域に $(8, 5)$ で接するときの 18。よって必要十分条件は $c > 18$ である。