

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2015 年 度 TEAP2 数 学 (PM)

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1)

(i) $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ に対する $\log_a M$ の定義を述べよ。

(ii) 正の実数 a, b, c ($a \neq 1, c \neq 1$) について、底の変換公式 $\log_c b = \log_a b / \log_a c$ を証明せよ。

(2) 正の実数 x の自然対数を

$$\log x = \int_1^x dt/t$$

で定める。この定義を用いて、正の実数 x, y に対し $\log(xy) = \log x + \log y$ を示せ。

第 2 問

座標平面上で $\boldsymbol{p} = (p, 0)$, $\boldsymbol{q} = (q, 0)$ とする。ただし $0 < p < 1$, $q > 1$ 。 $\boldsymbol{x}$ を単位ベクトルとする。

(1) 任意の $\boldsymbol{x}$ について, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ が直交しないことを示せ。

(2) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}$ が直交するとき, $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|$ を q で表せ。

(3) 任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}| : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}| = 1 : 2$ であるとする。

(i) p, q を求めよ。

(ii) $\boldsymbol{x} \perp (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q})$ のとき, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を図示せよ。

(iii) 実数 a に対して

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|^3} - a \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}|^3}$$

とおく。任意の $\boldsymbol{x}$ で $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{x}$ となる a を求めよ。

第 3 問

(1) $x = (3 + \sqrt{5})/2$ とする。 x が満たす 2 次方程式, $y = x^2$ が満たす 2 次方程式を求め, $x^3 = ax + b$ となる整数 a, b を求めよ。

(2) $\cos 3\theta, \cos 5\theta$ をそれぞれ $\cos \theta$ の多項式で表せ。

(3) $a > 1$ とし, 数列を

$$a, 1 \mid a^2, a, 1 \mid a^3, a^2, a, 1 \mid \cdots$$

と群に分ける。 a^{12} が初めて現れる項番号と, 第 645 項が属する群および群内の項番号を求めよ。

(4) 次の 3 組の連続する試行について, 独立な組をすべて選べ。

- a. 4 赤 4 白の袋から 1 個引き, 戻してからもう 1 個引く。
- b. 30 人から無作為に X, Y を順に選び, それぞれの誕生日が 1 月 1 日である事象を考える。
- c. 黒猫 3 匹・白猫 2 匹が別々の扉の後ろにいて, 1 枚目の扉に黒猫, 別の扉に白猫がいる事象を考える。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)