

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2016 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) n を 5 以上の自然数とする. 1 から n までの自然数から 3 つ選ぶとき, それらが互いに隣り合わないような選び方の総数を求めよ.

(2) x の整式 $P = x^3 - x^2 + 1$ を $Q = x^2 - x + 1$ で割った余りを R , Q を R で割った余りを S とする. このとき,

$$S = (ax + b)P + (cx^2 + d)Q$$

となる定数 a, b, c, d を求めよ.

(3) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たす. $w = \frac{4z}{1 - 2z}$ とおくとき, w の満たす関係式を求めよ.

第 2 問

四面体 $OABC$ があり，次の条件が満たされているものとする．

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}, \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0,$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{3}{2}, \quad |\overrightarrow{OC}|^2 = 1.$$

(1) 点 B を通り，平面 OAC に垂直な直線と平面 OAC との交点を H とする．このとき， $\overrightarrow{OH}$ と $|\overrightarrow{BH}|$ を求めよ．

(2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ．

(3) 辺 OA 上に点 P ，辺 BC 上に点 Q があり， P, Q を通る直線が OA および BC と直交しているとする．このとき， OP を OA で表し，四面体 $PABQ$ の体積が四面体 $OABC$ の体積の何倍であるかを求めよ．

第 3 問

関数

$$f(x) = a \sin \left(\left(\frac{x}{2} + b \right) \pi \right) + c$$

を考える。ただし、 a, b, c は定数で $a > 0$, $-1 < b \leq 1$ とする。

(1) $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ のとき, a, b を求めよ。

(2) $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ のとき, b はただ一つに定まり, $\cos(b\pi)$ を求めよ。

(3) 次の集合 A, B を考える。

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{f(-1), f(0), f(1)\}.$$

(i) $A \supset B$ となる a, b, c の組は何通りあるか。また, このうち $f(x)$ が $-1 < x < 1$ で最小値をとるものは何通りあるか。

(ii) $A = B$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

第 4 問

(1) 関数 $f(t) = \sqrt{1 + \cos t}$ について, $0 \leq t \leq \pi$ のときの $f'(t)$ を求めよ.

(2) xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

で与えられている. (i) 点 P が描く曲線を選べ. (ii) $0 < t < \frac{2\pi}{3}$ のとき, x は単調に減少し, y は単調に増加する. また, $\frac{2\pi}{3} < t < \pi$ のとき, x は単調に増加し, y は単調に減少する. $t = \frac{2\pi}{3}$ のときの点 P の座標を求めよ. (iii) 点 P が描く曲線で囲まれた部分の面積を求めよ. また, $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が動く道のりを求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)