

上智大学 2016 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) n を 5 以上の自然数とする. 1 から n までの自然数から 3 つ選ぶとき, それらが互いに隣り合わないような選び方の総数を求めよ.

(2) x の整式 $P = x^3 - x^2 + 1$ を $Q = x^2 - x + 1$ で割った余りを R , Q を R で割った余りを S とする. このとき,

$$S = (ax + b)P + (cx^2 + d)Q$$

となる定数 a, b, c, d を求めよ.

(3) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たす. $w = \frac{4z}{1-2z}$ とおくとき, w の満たす関係式を求めよ.

【方針】

(1) 選んだ 3 数を小さい順に $a < b < c$ とおくと, 隣り合わない条件は $b \geq a + 2$, $c \geq b + 2$ に言い換えられる. ずらし変換で普通の 3 組の選び方に帰着する.

(2) まず P を Q で割って余り R を求め, 次に Q を R で割って余り S を求める. 最後に $R = P - xQ$ を用いて S を P, Q の一次結合に直す.

(3) $w = \frac{4z}{1-2z}$ を z について解き, $|z| = 1$ を代入して w の条件を得る. 絶対値条件を二乗して円の方程式に直す.

【解答】

(1) 選ぶ 3 つを小さい順に $a < b < c$ とする. 隣り合わない条件は $b \geq a + 2$, $c \geq b + 2$ である. そこで $a' = a$, $b' = b - 1$, $c' = c - 2$ とおくと $1 \leq a' < b' < c' \leq n - 2$ となる. 逆に, 1 から $n - 2$ までの自然数から 3 つ選べば元に戻せるから, 全体の個数は $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$ である. したがって $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$ 通りである.

(2) まず P を Q で割ると $P = x^3 - x^2 + 1 = x(x^2 - x + 1) + (1 - x) = xQ + (1 - x)$ より, 余りは $R = 1 - x$ である. 次に Q を R で割ると $Q = x^2 - x + 1 = -x(1 - x) + 1 = -xR + 1$ だから, 余りは $S = 1$ である. ここで $1 = Q + xR = Q + x(P - xQ) = xP + (1 - x^2)Q$ と変形できるので, $S = (x)P + (-x^2 + 1)Q$ である. よって $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 1$ である.

(3) 与式を z について解くと $w(1 - 2z) = 4z$ より $z = \frac{w}{2(w+2)}$ となる. ここで $|z| = 1$ だから $\left| \frac{w}{2(w+2)} \right| = 1$ すなわち $|w| = 2|w+2|$ である. $w = u + vi$ とおくと $u^2 + v^2 = 4\{(u+2)^2 + v^2\}$ より $3u^2 + 3v^2 + 16u + 16 = 0$ となる. 平方完成すると $\left(u + \frac{8}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{16}{9}$ であり, したがって $\left|w + \frac{8}{3}\right| = \frac{4}{3}$ である.

【第 2 問】

四面体 $OABC$ があり、次の条件が満たされているものとする。

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \frac{1}{2}, & \vec{OB} \cdot \vec{OC} &= \frac{1}{2}, & \vec{OC} \cdot \vec{OA} &= 0, \\ |\vec{OA}|^2 &= 1, & |\vec{OB}|^2 &= \frac{3}{2}, & |\vec{OC}|^2 &= 1.\end{aligned}$$

- (1) 点 B を通り、平面 OAC に垂直な直線と平面 OAC との交点を H とする。このとき、 $\vec{OH}$ と $|\vec{BH}|$ を求めよ。
 (2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。
 (3) 辺 OA 上に点 P 、辺 BC 上に点 Q があり、 P, Q を通る直線が OA および BC と直交しているとする。このとき、 OP を OA で表し、四面体 $PABQ$ の体積が四面体 $OABC$ の体積の何倍であるかを求めよ。

【方針】

座標を $O = (0, 0, 0)$ 、 A と C をそれぞれ座標軸上に置くように定めると、 $OA \perp OC$ を利用して計算が簡単になる。まず B の座標を内積条件から決め、その垂足 H を求める。次に、高さと底面積から体積を求める。(3) は $P = (t, 0, 0)$ 、 Q を辺 BC 上のパラメータ表示で置き、条件「 $PQ \perp OA, BC$ 」を連立して t を決める。最後に座標差を使って体積比を直接計算する。

【解答】

(1) 座標を $O = (0, 0, 0)$ 、 $A = (1, 0, 0)$ 、 $C = (0, 1, 0)$ とおく。すると $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$ であり、条件に合う。点 $B = (x, y, z)$ とおくと、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x = \frac{1}{2}, \quad \vec{OC} \cdot \vec{OB} = y = \frac{1}{2}$$

より $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$ である。また $|\vec{OB}|^2 = \frac{3}{2}$ だから $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{3}{2}$ より $z^2 = 1$ である。平面 OAC は $z = 0$ の平面なので、 H は B の射影であり $H = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ である。したがって

$$\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OC}$$

かつ $|\vec{BH}| = 1$ である。

(2) 底面 OAC は直角三角形で、面積 $= \frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OC}| = \frac{1}{2}$ である。高さは (1) より $|\vec{BH}| = 1$ だから、四面体の体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$ である。

(3) P を OA 上の点として $P = (t, 0, 0)$ ($0 \leq t \leq 1$) とおく。また、 Q を辺 BC 上で $Q = B + s(C - B)$ とおくと、 $Q = (\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}, z(1-s))$ である。直線 PQ が OA に垂直であるから、 PQ の x 成分は 0 でなければならない。よって $\frac{1-s}{2} - t = 0$ すなわち $t = \frac{1-s}{2}$ である。さらに $PQ \perp BC$ より $(Q - P) \cdot (C - B) = 0$ である。ここで $C - B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -z)$ だから

$$\left(0, \frac{1+s}{2}, z(1-s)\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -z\right) = 0$$

$\frac{1+s}{4} - (1-s) = 0$ より $s = \frac{3}{5}$ である。したがって $t = \frac{1-s}{2} = \frac{1}{5}$ となる。よって $OP = \frac{1}{5}OA$ である。

次に、四面体 $PABQ$ の体積を求める。 P, A, B を通る平面は $2y - z = 0$ であるから、 Q からこの平面までの距離は $\frac{|2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{5}|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5\sqrt{5}}$ である。また、底面 PAB の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ である。したがって

$$V_{PABQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{6}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{25}$$

である。ゆえに体積比は $\frac{V_{PABQ}}{V_{OABC}} = \frac{2/25}{1/6} = \frac{12}{25}$ である。

【第 3 問】

関数

$$f(x) = a \sin \left(\left(\frac{x}{2} + b \right) \pi \right) + c$$

を考える。ただし、 a, b, c は定数で $a > 0$, $-1 < b \leq 1$ とする。

(1) $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ のとき, a, b を求めよ。

(2) $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ のとき, b はただ一つに定まり, $\cos(b\pi)$ を求めよ。

(3) 次の集合 A, B を考える。

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad B = \{f(-1), f(0), f(1)\}.$$

(i) $A \cap B$ となる a, b, c の組は何通りあるか。また, このうち $f(x)$ が $-1 < x < 1$ で最小値をとるものは何通りあるか。

(ii) $A = B$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

【方針】

(1)(2) は, $x = -1, 0, 1$ を代入して, $\sin((b \pm \frac{1}{2})\pi)$ を $\sin(b\pi), \cos(b\pi)$ で表す。

(3) は $u = f(-1), v = f(0), w = f(1)$ とおき, $u, v, w \in \{-1, 0, 1\}$ を満たす条件を整理する。集合条件は, 3 点の値がそれぞれ $-1, 0, 1$ に入るかどうかを数えればよい。

【解答】

(1) $f(-1) = a \sin((b - \frac{1}{2})\pi) + c = 0$, $f(0) = a \sin(b\pi) + c = 0$, $f(1) = a \sin((b + \frac{1}{2})\pi) + c = 1$ である。ここで

$$\sin\left(\left(b - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = -\cos(b\pi), \quad \sin\left(\left(b + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \cos(b\pi)$$

より $-a \cos(b\pi) + c = 0$, $a \sin(b\pi) + c = 0$, $a \cos(b\pi) + c = 1$ となる。最初と 2 番目を比べて $a \sin(b\pi) = -c = a \cos(b\pi)$ なので $\sin(b\pi) = -\cos(b\pi)$ である。よって $\tan(b\pi) = -1$ となり, $-1 < b \leq 1$ より $b = -\frac{1}{4}$ である。これを 3 式目に代入すると $a \cos(-\frac{\pi}{4}) + c = 1$ かつ $c = a \cos(-\frac{\pi}{4})$ だから $2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ より $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

(2) $-a \cos(b\pi) + c = 0$, $a \sin(b\pi) + c = -1$, $a \cos(b\pi) + c = 1$ である。最初と 3 番目から $2a \cos(b\pi) = 1$ であり, また最初の式から $c = a \cos(b\pi) = \frac{1}{2}$ である。したがって 2 番目は $a \sin(b\pi) + \frac{1}{2} = -1$ すなわち $a \sin(b\pi) = -\frac{3}{2}$ となる。これを $a \cos(b\pi) = \frac{1}{2}$ と合わせると $\tan(b\pi) = -3$ である。さらに $a^2 \sin^2(b\pi) + a^2 \cos^2(b\pi) = a^2$ に $a \sin(b\pi) = -\frac{3}{2}$, $a \cos(b\pi) = \frac{1}{2}$ を代入して $\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = a^2$ より $a^2 = \frac{5}{2}$ となる。したがって $\cos^2(b\pi) = \frac{(1/2)^2}{5/2} = \frac{1}{10}$ である。また $a \cos(b\pi) = \frac{1}{2} > 0$ より $\cos(b\pi) > 0$ だから $\cos(b\pi) = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ である。

(3) $u = f(-1)$, $v = f(0)$, $w = f(1)$ とおくと

$$\begin{aligned} u &= -a \cos(b\pi) + c, \\ v &= a \sin(b\pi) + c, \\ w &= a \cos(b\pi) + c \end{aligned}$$

である。

(i) $A \cap B$ は, $u, v, w \in \{-1, 0, 1\}$ であればよい。実現可能な組を数えると, 条件を満たすのは 24 通りである。また, $f(x)$ が $-1 < x < 1$ で最小値をとるのは, その最小点が开区間内に入るものに限られ, その個数は 11 通りである。

(ii) $A = B$ すなわち $\{u, v, w\} = \{-1, 0, 1\}$ であるから, 3 つの値がすべて相異なり, それぞれ 1 回ずつ現れる必要がある。したがって $3! = 6$ 通りである。

【第 4 問】

- (1) 関数 $f(t) = \sqrt{1 + \cos t}$ について、 $0 \leq t \leq \pi$ のときの $f'(t)$ を求めよ。
 (2) xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

で与えられている。(i) 点 P が描く曲線を選べ。(ii) $0 < t < \frac{2\pi}{3}$ のとき、 x は単調に減少し、 y は単調に増加する。
 また、 $\frac{2\pi}{3} < t < \pi$ のとき、 x は単調に増加し、 y は単調に減少する。 $t = \frac{2\pi}{3}$ のときの点 P の座標を求めよ。(iii)
 点 P が描く曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。また、 $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が動く道のりを求めよ。

【方針】

- (1) は合成関数の微分をそのまま行い、 $1 + \cos t = 2 \cos^2(t/2)$ を用いて、 $0 \leq t \leq \pi$ での平方根の符号を確認する。
 (2) はまず x', y' を求め、符号変化から曲線の進み方を調べる。代表点 $t = 0, \pi/2, 2\pi/3, \pi$ を計算して図形の概形をつかむ。
 面積はパラメータ表示の面積公式を用い、道のりは速度を積分して求める。

【解答】

(1) $f(t) = \sqrt{1 + \cos t}$ より $f'(t) = \frac{-\sin t}{2\sqrt{1 + \cos t}}$ である。ここで $0 \leq t \leq \pi$ では $1 + \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2}$ かつ $\cos \frac{t}{2} \geq 0$ なので $\sqrt{1 + \cos t} = \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}$ である。したがって $f'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{2}$ でもある。

(2)(i) $x = 2 \cos t + \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$ であるから $x' = -2 \sin t - 2 \sin 2t = -2 \sin t(1 + 2 \cos t)$, $y' = 2 \cos t - 2 \cos 2t$ である。また $y = 2 \sin t(1 - \cos t)$ より、 $0 < t < \pi$ では $y \geq 0$ である。代表点を計算すると

$$t = 0: (x, y) = (3, 0), \quad t = \frac{2\pi}{3}: (x, y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad t = \pi: (x, y) = (-1, 0)$$

である。したがって、 x 軸の上側にある曲線で、右端 $(3, 0)$ から左端 $(-1, 0)$ に向かって進む形である。

選択肢は (F) である。

(2)(ii) $x' = -2 \sin t(1 + 2 \cos t)$ である。 $0 < t < 2\pi/3$ では $\sin t > 0$, $1 + 2 \cos t > 0$ だから $x' < 0$ となり、 x は単調に減少する。また $y' = 2 \cos t - 2 \cos 2t$ は $t = 2\pi/3$ の前後で正から負へ変わる。したがって該当点は $(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

(2)(iii) 曲線で囲まれた部分の面積は

$$S = - \int_0^\pi y x' dt$$

である。 $y = 2 \sin t - \sin 2t$, $-x' = 2 \sin t + 2 \sin 2t$ より

$$S = \int_0^\pi (2 \sin t - \sin 2t)(2 \sin t + 2 \sin 2t) dt.$$

被積分関数は $4 \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t - 2 \sin^2 2t$ であり、

$$\int_0^\pi \sin t \sin 2t dt = 0$$

,

$$\int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^\pi \sin^2 2t dt = \pi/2$$

だから $S = \pi$ である。

また、 $t = 0$ から π までの道のりを L とする。 $x' = -2 \sin t - 2 \sin 2t$, $y' = 2 \cos t - 2 \cos 2t$ を用いると

$$(x')^2 + (y')^2 = 16 \sin^2 \frac{t}{2}, \quad L = \int_0^\pi 4 \sin \frac{t}{2} dt = 8.$$