

上智大学 2016 年度 TEAP1 数学 (AM)

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 1 から 777 までの整数で、4 の倍数であるが 5 の倍数でも 6 の倍数でもない数の個数と、それらの総和の下 2 桁を求めよ。

(2) a を定数とし

$$f(x) = 9^{x+1/2} - 3^{x+3/2} + 3a - 1$$

とする。方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(3) 2 曲線

$$C_1 : y = |x - 1|(x + 3), \quad C_2 : y = |x + 1|(-x + 3)$$

で囲まれた図形の面積を求めよ。

【方針】

(1) 4 の倍数全体から 20 の倍数と 12 の倍数を除き、60 の倍数を戻す。個数と等差数列の和を同じ包除で計算する。(2) $t = 3^x > 0$ と置き、2 次方程式が異なる 2 正根をもつ条件にする。(3) 絶対値を区間ごとに外し、対称性を使って積分する。

【解答】

(1) 個数は包除原理から

$$\left\lfloor \frac{777}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{777}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{777}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{777}{60} \right\rfloor = 194 - 38 - 64 + 12 = 104.$$

総和は

$$\sum_{k=1}^{194} 4k - \sum_{k=1}^{38} 20k - \sum_{k=1}^{64} 12k + \sum_{k=1}^{12} 60k = 40560$$

だから、下 2 桁は 60。

(2) $t = 3^x > 0$ とおくと

$$f(x) = 3t^2 - 3\sqrt{3}t + 3a - 1.$$

軸は正なので、異なる 2 正根をもつ条件は定数項が正かつ判別式が正であること、すなわち $3a - 1 > 0$, $39 - 36a > 0$ である。よって $1/3 < a < 13/12$ 。

(3) 交点と絶対値の切替点を調べると、図形は y 軸対称で、右半分では $0 \leq x \leq 1$ と $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ に分かれる。したがって面積は

$$2 \int_0^1 4x \, dx + 2 \int_1^{\sqrt{3}} (-2x^2 + 6) \, dx = -\frac{20}{3} + 8\sqrt{3}.$$

【第 2 問】

一辺の長さが 1 の立方体 $OABC-DEFG$ を, 正方形 $OABC, OAED, OCGD$ がそれぞれ xy, xz, yz 平面に重なるように座標空間に置く。

点 P は表面上を移動し, 原点 O を出発した後, 移動距離が最短になるように点 D へ進む。ただし P は線分 AE, BF, CG 上の点をこの順に通過する。 P が表面 $BCGF$ 上にあるとき, P から直線 OF に下ろした垂線の足を H とする。

(1) P, H の z 座標を v, w とする。 P の x 座標が a ($0 \leq a \leq 1$) のとき, v, w と PH を a で表せ。

(2) PH を最小にする P の位置を Q とする。 $\triangle OQF$ の面積を求めよ。また O から Q までの移動距離を ℓ , Q から D までの移動距離を m とするとき, $\ell, m, \ell/m$ を求めよ。

【方針】

通過する 3 面を展開し, 最短経路を一直線にする。展開図の相似から P の高さを求め, $H \in OF$ と直交条件から H を決める。 PH^2 を平方完成して最小点を求め, 展開図上の直角三角形から前後の移動距離を計算する。

【解答】

(1) 3 面を横に展開し, 終点側へもう 1 面を補うと, 最短経路は展開図上の一直線となる。相似から

$$v = -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}.$$

$\overrightarrow{OH} = h(1, 1, 1)$ とおき, $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{OF}$ を使うと

$$w = h = \frac{1}{4}a + \frac{7}{12}.$$

したがって

$$PH = \sqrt{\frac{7}{8}a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{13}{24}}.$$

(2) 平方完成すると

$$PH^2 = \frac{7}{8} \left(a - \frac{5}{7} \right)^2 + \frac{2}{21}.$$

よって Q では $a = 5/7$, $QH = \sqrt{42}/21$ 。 $OF = \sqrt{3}$ かつ $QH \perp OF$ だから

$$[\triangle OQF] = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{42}}{21} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

展開図で経路と平行方向・垂直方向の成分を用いると

$$\ell = \frac{4\sqrt{17}}{7}, \quad m = \frac{3\sqrt{17}}{7}, \quad \frac{\ell}{m} = \frac{4}{3}.$$

【第 3 問】

- (1) $2016_{(7)}$ を 10 進法で表せ。
 (2) m, n を整数とし $2 \leq m < n \leq 9$ とする。

$$10101_{(n)} - 10101_{(m)}$$

を 10 進法で表した数を k とする。

(i) k が 21 の倍数となる (m, n) の組をすべて求め、その個数と、その中で $m + n$ が最大となる組を答えよ。

(ii) (i) で $m + n$ が最大となる組に対する k を K とする。 K を m 進法で表したときの m^2 の位の数字と、 K を n 進法で表したときの n^2 の位の数字を求めよ。

【方針】

各位を基数のべきに展開する。 k を因数分解し、3 と 7 に関する平方剰余で候補を絞る。最後は確定した K を各基数で割り進める。

【解答】

$$(1) 2016_{(7)} = 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 6 = 699.$$

(2)(i)

$$k = (n^4 + n^2 + 1) - (m^4 + m^2 + 1) = (n^2 - m^2)(n^2 + m^2 + 1).$$

3 と 7 に関する剰余を調べると、21 の倍数となるのは

$$(m, n) = (2, 5), (2, 4), (3, 9), (4, 5)$$

の 4 組である。このうち $m + n$ が最大なのは $(3, 9)$ 。

(2)(ii) $K = (9 - 3)(9 + 3)(9^2 + 3^2 + 1) = 6552$ 。3 進法では $K = 22222220_{(3)}$ だから 3^2 の位は 2。9 進法では $K = 8880_{(9)}$ だから 9^2 の位は 8。