

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2016 年 度 TEAP2 数 学 (PM)

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) 自然数 n に対して

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = 0$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

(2) 等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\log 2$$

を証明せよ。

第 2 問

整数座標をもつ点を格子点，両座標が有理数である点を有理点とよぶ。

(1) 次の条件を満たす直線を選択肢からすべて選べ。

- (i) 格子点を 1 点だけ通る。
- (ii) 格子点を通らないが，有理点を 2 点以上通る。
- (iii) 格子点を通らないが，有理点を 1 点だけ通る。
- (iv) 有理点を通らない。

$$\begin{array}{ll} A : 2x + 3y = 0, & B : 2x - 3y = 1, \\ C : 4x + 6y = 3, & D : x + \sqrt{3}y = 3, \\ E : \sqrt{2}x + 3y = 2, & F : \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1, \\ G : \sqrt{2}x + 3y = \sqrt{2}, & H : 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{2}. \end{array}$$

(2) (iv) で選んだ直線が有理点を 1 つも通らないことを証明せよ。ただし $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

第 3 問

座標平面上に半径 2 の円板 D があり，初め中心は $(0, 2)$ ，円板上の定点 P は $(0, 1)$ にある。
 D が x 軸に接しながら正の方向へ滑らずに 1 回転するとき， P が描く曲線を C とする。

- (1) 円板が初めの位置から角度 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) だけ回転したときの P の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) P における C の接線の傾きが最大となる θ と，その最大値を求めよ。

第 4 問

(1) 自然数 n に対し

$$z_n = \cos \frac{\pi}{3^n} + i \sin \frac{\pi}{3^n}$$

とする。

$$\frac{z_2 z_4 \cdots z_{2n}}{z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (-\pi < \alpha \leq \pi)$$

であるとき、 α を求めよ。

(2) 集合 $\{4^k \mid k = 0, 1, \dots, 6\}$ に属する異なる 2 個以上の整数の和として表される整数全体の集合を S とする。 S の要素のうち 8 の倍数であるものの個数と、 S の全要素の和を 8 で割った余りを求めよ。

(3) 一辺 1 の立方体 $OAPB-CQSR$ において、辺 AQ を $t : (1-t)$ に内分する点を T とする ($0 < t < 1$)。 T を通り直線 OS と垂直な平面で立方体を切った断面を D 、 D と直線 OS の交点を H とする。 TH^2 を求めよ。また $0 < t \leq 1/2$ のとき、 D の周上の点と H の距離の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)