

上智大学 2016 年度 TEAP2 数学 (PM)

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 自然数 n に対して

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = 0$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

(2) 等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\log 2$$

を証明せよ。

【方針】

(1) $n = k + 1$ の式から $n = k$ の和を引き、追加・消失する項を整理する。(2) $1/x$ の積分と長方形和で調和和を $\log 2$ へはさみ、(1) で交代和へ移す。

【解答】

(1) $n = 1$ では $1/2 - 1 + 1/2 = 0$ である。 $n = k$ で成立すると仮定する。 $n = k + 1$ の左辺から $n = k$ の左辺を除いて整理すると

$$-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = 0.$$

よって $n = k + 1$ でも成立し、帰納法で示された。

(2) $1/x$ は単調減少だから

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x}.$$

両端は $n \rightarrow \infty$ で $\log 2$ に収束するので、はさみうちにより中央も $\log 2$ に収束する。(1) から

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \rightarrow -\log 2.$$

奇数番目までの部分和との差は $1/(2n+1) \rightarrow 0$ だから、求める無限級数は $-\log 2$ である。

【第 2 問】

整数座標をもつ点を格子点, 両座標が有理数である点を有理点とよぶ。

(1) 次の条件を満たす直線を選択肢からすべて選べ。

- (i) 格子点を 1 点だけ通る。
- (ii) 格子点を通らないが, 有理点を 2 点以上通る。
- (iii) 格子点を通らないが, 有理点を 1 点だけ通る。
- (iv) 有理点を通らない。

$$\begin{aligned} A: 2x + 3y &= 0, & B: 2x - 3y &= 1, \\ C: 4x + 6y &= 3, & D: x + \sqrt{3}y &= 3, \\ E: \sqrt{2}x + 3y &= 2, & F: \sqrt{2}x - \sqrt{3}y &= 1, \\ G: \sqrt{2}x + 3y &= \sqrt{2}, & H: 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(2) (iv) で選んだ直線が有理点を 1 つも通らないことを証明せよ。ただし $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

【方針】

整数係数の直線は合同条件で格子点の有無を調べる。無理係数を含む場合は一方の座標を 0 とし有理点を探し, 仮に別の有理点があると置いて無理数性との矛盾を導く。

【解答】

(1) 各条件に該当する選択肢は

(i) D,G, (ii) C, (iii) E,H, (iv) F.

A, B はそれぞれ無数の格子点を通る。

(2) F が有理点 (p, q) を通ると仮定する。 $p = 0$ なら $q = -1/\sqrt{3}$, $q = 0$ なら $p = 1/\sqrt{2}$ となり, いずれも有理点ではない。したがって $pq \neq 0$ としてよい。

$$\sqrt{2}p - \sqrt{3}q = 1$$

の両辺を平方して整理すると

$$\sqrt{2} = \frac{2p^2 - 3q^2 + 1}{2p}.$$

右辺は有理数であり, $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。よって F は有理点を通らない。

【第 3 問】

座標平面上に半径 2 の円板 D があり, 初め中心は $(0, 2)$, 円板上の定点 P は $(0, 1)$ にある。 D が x 軸に接しながら正の方向へ滑らずに 1 回転するとき, P が描く曲線を C とする。

- (1) 円板が初めの位置から角度 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) だけ回転したときの P の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) P における C の接線の傾きが最大となる θ と, その最大値を求めよ。

【方針】

円板の中心は $(2\theta, 2)$ へ進み, 中心から P への長さ 1 のベクトルが時計回りに回転する。(2) は $y = 2$ との交点をパラメータで求めて積分する。(3) は dy/dx を θ で微分する。

【解答】

(1) 中心は $(2\theta, 2)$ にあり, 中心から P へのベクトルは $(-\sin \theta, -\cos \theta)$ 。よって

$$P = (2\theta - \sin \theta, 2 - \cos \theta).$$

(2) $y = 2$ となるのは $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ であり, $dx/d\theta = 2 - \cos \theta$ である。したがって面積は

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (y - 2) \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos \theta)(2 - \cos \theta) d\theta = 4 + \frac{\pi}{2}.$$

(3) 接線の傾きは

$$g(\theta) = \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta}, \quad g'(\theta) = \frac{2 \cos \theta - 1}{(2 - \cos \theta)^2}.$$

増減を調べると $\theta = \pi/3$ で最大となり、最大値は $g(\pi/3) = \sqrt{3}/3$ 。

【第 4 問】

(1) 自然数 n に対し

$$z_n = \cos \frac{\pi}{3^n} + i \sin \frac{\pi}{3^n}$$

とする。

$$\frac{z_2 z_4 \cdots z_{2n}}{z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (-\pi < \alpha \leq \pi)$$

であるとき、 α を求めよ。

(2) 集合 $\{4^k \mid k = 0, 1, \dots, 6\}$ に属する異なる 2 個以上の整数の和として表される整数全体の集合を S とする。 S の要素のうち 8 の倍数であるものの個数と、 S の全要素の和を 8 で割った余りを求めよ。

(3) 一辺 1 の立方体 $OAPB-CQSR$ において、辺 AQ を $t : (1-t)$ に内分する点を T とする ($0 < t < 1$)。 T を通り直線 OS と垂直な平面で立方体を切った断面を D 、 D と直線 OS の交点を H とする。 TH^2 を求めよ。また $0 < t \leq 1/2$ のとき、 D の周上の点と H の距離の最小値を求めよ。

【方針】

(1) 偏角の等比数列和を偶数番と奇数番で引く。(2) $4^0, 4^1$ を含むかで 4 分類し、残り 5 項の部分集合を数える。(3) 互いに直交する 3 辺を基底にして H を内積から求め、対称性を使って断面境界までの最短距離を出す。

【解答】

(1) 分子と分母の偏角を等比数列として足すと

$$\arg(z_2 z_4 \cdots z_{2n}) = \frac{1}{8}(1 - 3^{-2n})\pi,$$

$$\arg(z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}) = \frac{3}{8}(1 - 3^{-2n})\pi.$$

したがって

$$\alpha = -\frac{1}{4}(1 - 3^{-2n})\pi.$$

(2) $4^0, 4^1$ を含むか否かで分ける。両方を含む場合の 8 の倍数はなく、どちらも含まない場合は $2^5 - 5 - 1 = 26$ 個がすべて 8 の倍数である。他の 2 分類でも 8 の倍数はないので、個数は 26。各分類の要素の和を 8 で見れば、余りはそれぞれ 5, 7, 4, 0 だから、全体では $5 + 7 + 4 \equiv 3 \pmod{8}$ 。

(3) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を互いに直交する単位ベクトルとする。 $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OS}$ とおき、 $\overrightarrow{TH} \perp \overrightarrow{OS}$ を使うと $k = (t+1)/3$ である。したがって

$$TH^2 = \frac{2}{3}(t^2 - t + 1).$$

$0 < t \leq 1/2$ では対称な候補辺までの距離を比較すると、最短点は辺 QU 側にあり、最小距離は

$$\frac{\sqrt{6}}{6}(t+1).$$