

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2017 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

i を虚数単位とする. (1) $\alpha = 2 + (1 - \sqrt{3})i$, $\beta = 1 + 3i$ を複素数平面上の点とする. (i) 点 β を中心として, 点 α を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転すると, 得られる点を求めよ. (ii) 点 α を, ある点を中心として時計回りに $\frac{5\pi}{6}$ だけ回転すると点 β に重なる. その中心となる点を求めよ. (2) 複素数 z は $|z| = 1$ を満たすとする.

$$w = \frac{-z + 2i}{2z + i}$$

とおくとき, $|w|$ のとり得る値の最大値と最小値を求めよ.

第 2 問

座標空間に点 $A(0, -1, 4)$, $B(5, -1, 4)$, $C(3, 0, 1)$, $D(3, 4, 4)$ があり, 点 M , N がそれぞれ一定の速度で直線 AB , CD 上を動いている. M , N は時刻 $t = 0$ でそれぞれ A , C にあり, 時刻 $t = 5$ ではそれぞれ B , D にある. (1) 時刻 t において, M , N の座標を求めよ. (2) MN が最小となる時刻とその最小値を求めよ. (3) 3 点 $P(0, 0, 1)$, M , N を頂点とする三角形の面積が最小となる時刻とその最小値を求めよ.

第 3 問

e を自然対数の底とする. $y = e^x$ で表される曲線を C とし, 原点から C へ引いた接線を l とする. 曲線 C , 直線 l および y 軸で囲まれた図形を D とする. (1) C との接点の x 座標を求めよ. (2) D の面積を求めよ. (3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ. (4) a, b を定数とすると,

$$\frac{d}{dx} \left((x^2 + ax + b)e^x \right) = x^2 e^x$$

となるような a, b を求めよ. (5) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

第 4 問

m を 5 以上の自然数とする. m 個の点を平面にある円周上に等間隔に並べる. これら m 個の点に, 時計回りの順に $1, 2, \dots, m$ と番号を付ける. 以下, 隣り合った点を時計回りに移動することを「進む」, 反時計回りに移動することを「戻る」ということとする. 例を挙げると, 点 1 から 5 つ進むと点 4 に移動し, 点 m から 3 つ進むと点 3 に移動し, 点 1 から 3 つ戻ると点 $(m-2)$ に移動する. 次の 2 つの操作を考える.

(操作 A) 5 つ進み, 移動した点に白石を置く.

(操作 B) 2 つ戻り, 移動した点に黒石を置く.

ある人が点 m を出発点として操作 A を行い, 次に操作 B を行い, 以下交互に操作 A と操作 B を繰り返し移動を続け, すべての点に石を置いたら操作を終了する. ただし, 移動した点すでに石が置かれている場合は, その石を取り除いて新たに石を置くものとする. (1) $m = 10$ のとき, 何回石を置くと操作は終了するか. また, 終了したとき, 最後にいる点の番号と, 置かれている黒石の個数を求めよ. (2) $m = 11$ のとき, 何回石を置くと操作は終了するか. また, 終了したとき, 最後にいる点の番号と, 置かれている黒石の個数を求めよ. (3) $m = 12$ のとき, 番号がどの 4 点には石が置かれず, 操作は終了しないか. ただし, それら 4 点の番号を小さい順に求めよ. (4) 操作が終了しないための必要十分条件は, m がある整数で割り切れることである. また, m が自然数 n を用いて $m = \text{その整数} \cdot n + 1$ と表されるとき, 何回石を置くと操作が終了するか. さらに, 終了したときに置かれている黒石の個数を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)