

上智大学 2017 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

i を虚数単位とする. (1) $\alpha = 2 + (1 - \sqrt{3})i$, $\beta = 1 + 3i$ を複素数平面上の点とする. (i) 点 β を中心として, 点 α を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転すると, 得られる点を求めよ. (ii) 点 α を, ある点を中心として時計回りに $\frac{5\pi}{6}$ だけ回転すると点 β に重なる. その中心となる点を求めよ. (2) 複素数 z は $|z| = 1$ を満たすとする.

$$w = \frac{-z + 2i}{2z + i}$$

とおくとき, $|w|$ のとり得る値の最大値と最小値を求めよ.

【方針】

(1)(i) は, 中心ベクトルを引いてから $\frac{\pi}{2}$ 回転し, 最後に中心を戻す. (1)(ii) は, 回転の中心を c とおき, $\beta - c = e^{-5\pi i/6}(\alpha - c)$ を解く. (2) は $z = x + yi$, $x^2 + y^2 = 1$ において $|w|^2$ を y の式にし, 単調性から端点で最大最小を判定する.

【解答】

(1) (i) まず $\alpha - \beta = (2 - 1) + ((1 - \sqrt{3}) - 3)i = 1 - (2 + \sqrt{3})i$ である. これを反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転すると, i を掛けて $i(1 - (2 + \sqrt{3})i) = (2 + \sqrt{3}) + i$ となる. したがって, 求める点は $\beta + (2 + \sqrt{3}) + i = (1 + 3i) + (2 + \sqrt{3}) + i = (3 + \sqrt{3}) + 4i$ である.

(ii) 中心を c とすると, 時計回りに $\frac{5\pi}{6}$ 回転するので $\beta - c = e^{-5\pi i/6}(\alpha - c)$ が成り立つ. ここで $u = e^{-5\pi i/6}$ とおくと $c = \frac{u\alpha - \beta}{u - 1}$ である.

$u = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ を用いて計算すると $c = 2 + (3 - \sqrt{3})i$ となる.

(2) $z = x + yi$, $x^2 + y^2 = 1$ とおくと

$$|w|^2 = \frac{|-z + 2i|^2}{|2z + i|^2} = \frac{x^2 + (2 - y)^2}{(2x)^2 + (2y + 1)^2}$$

である. ここで $x^2 = 1 - y^2$ を用いると $|-z + 2i|^2 = 1 - y^2 + 4 - 4y + y^2 = 5 - 4y$, $|2z + i|^2 = 4(1 - y^2) + (2y + 1)^2 = 5 + 4y$ より $|w|^2 = \frac{5 - 4y}{5 + 4y}$ ($-1 \leq y \leq 1$) となる. 右辺は $\frac{d}{dy} \left(\frac{5 - 4y}{5 + 4y} \right) = \frac{-40}{(5 + 4y)^2} < 0$ なので, y が大きいほど小さくなる. したがって最大値は $y = -1$ のとき, 最小値は $y = 1$ のときである.

$y = -1$ では $|w|^2 = 9$ より $|w| = 3$ であり, $y = 1$ では $|w|^2 = \frac{1}{9}$ より $|w| = \frac{1}{3}$ である.

よって, 最大値は 3, 最小値は $\frac{1}{3}$ である.

【総評】 (1)(i) は中心差を 90 度回転してから戻す手順を確認した. (1)(ii) は $c = 2 + (3 - \sqrt{3})i$ を $\beta - c = e^{-5\pi i/6}(\alpha - c)$ に代入して一致を検算した. (2) は単位円条件を用いて $|w|^2 = (5 - 4y)/(5 + 4y)$ とし, 端点 $y = \pm 1$ まで確認した.

【第 2 問】

座標空間に点 $A(0, -1, 4)$, $B(5, -1, 4)$, $C(3, 0, 1)$, $D(3, 4, 4)$ があり, 点 M, N がそれぞれ一定の速度で直線 AB, CD 上を動いている. M, N は時刻 $t = 0$ でそれぞれ A, C にあり, 時刻 $t = 5$ ではそれぞれ B, D にある. (1) 時刻 t において, M, N の座標を求めよ. (2) MN が最小となる時刻とその最小値を求めよ. (3) 3 点 $P(0, 0, 1)$, M, N を頂点とする三角形の面積が最小となる時刻とその最小値を求めよ.

【方針】

(1) 直線上を等速で動くので, 出発点から終点への比例配分で座標を表す. (2) 距離の二乗を計算して平方完成し, 最小時刻を求める. (3) 三角形の面積は 3 辺の長さから求める. まず PM^2, PN^2, MN^2 を計算し, それらからヘロンの式で面積の二乗を t の式にする.

【解答】

(1) M は $A(0, -1, 4)$ から $B(5, -1, 4)$ へ, 5 秒で移動するので, x 座標のみが 0 から 5 に変化する. したがって $M(t, -1, 4)$ である.

N は $C(3, 0, 1)$ から $D(3, 4, 4)$ へ 5 秒で移動するので, y 座標は 0 から 4 へ, z 座標は 1 から 4 へ変化する. よって $N(3, \frac{4}{5}t, \frac{3}{5}t + 1)$ である.

(2)

$$MN^2 = (t - 3)^2 + \left(-1 - \frac{4}{5}t\right)^2 + \left(4 - \left(\frac{3}{5}t + 1\right)\right)^2$$

であるから $MN^2 = (t - 3)^2 + \left(1 + \frac{4}{5}t\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{5}t\right)^2$ となる. 展開すると

$$MN^2 = t^2 - 6t + 9 + 1 + \frac{8}{5}t + \frac{16}{25}t^2 + 9 - \frac{18}{5}t + \frac{9}{25}t^2$$

$= 2t^2 - 8t + 19$ である. よって $MN^2 = 2(t - 2)^2 + 11$ となり, $0 \leq t \leq 5$ の範囲で最小となるのは $t = 2$ のときである. そのとき $MN = \sqrt{11}$ である.

(3) まず $PM^2 = t^2 + (-1)^2 + 3^2 = t^2 + 10$, $PN^2 = 3^2 + \left(\frac{4}{5}t\right)^2 + \left(\frac{3}{5}t\right)^2 = 9 + t^2$, $MN^2 = 2t^2 - 8t + 19$ である. 三角形 PMN の面積を S とすると, ヘロンの式より $16S^2 = 2(PM^2PN^2 + PN^2MN^2 + MN^2PM^2) - (PM^4 + PN^4 + MN^4)$ である. これに上の式を代入して整理すると $16S^2 = 4t^4 + 12t^2 + 360$ となるから $4S^2 = t^4 + 3t^2 + 90$ である. ここで $u = t^2$ とおくと $4S^2 = u^2 + 3u + 90$ となり, $u \geq 0$ なので $\frac{d}{du}(u^2 + 3u + 90) = 2u + 3 > 0$ である. したがって最小は $u = 0$, すなわち $t = 0$ のときに起こる.

そのとき $4S^2 = 90$ より $S = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ である.

【総評】 (2) は距離の二乗を平方完成して最小時刻を出すと, 平方根の処理を最後まで遅らせられる. (3) は外積を使わず, 3 辺の長さを先に確定してヘロンの式に代入し, $4S^2$ が t^2 の多項式に落ちることを確認した. $t = 0$ での値が面積最小値と一致するかも別計算で照合した.

【第 3 問】

e を自然対数の底とする. $y = e^x$ で表される曲線を C とし, 原点から C へ引いた接線を l とする. 曲線 C , 直線 l および y 軸で囲まれた図形を D とする. (1) C との接点の x 座標を求めよ. (2) D の面積を求めよ. (3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ. (4) a, b を定数とすると,

$$\frac{d}{dx} \left((x^2 + ax + b)e^x \right) = x^2 e^x$$

となるような a, b を求めよ. (5) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

【方針】

(1) 曲線 $y = e^x$ の $x = a$ における接線の式を立て, 原点を通る条件から a を決める. (2) 面積は曲線と直線の上下関係を確認して, $x = 0$ から接点までの定積分で求める. (3) x 軸回転体はワッシャー法で, 外半径と内半径の二乗差を積分する. (4) 積の微分を展開して係数比較する. (5) y 軸回転体は円筒殻法で,

$$2\pi \int x(\text{上} - \text{下})dx$$

を用いる.

【解答】

(1) $y = e^x$ の $x = a$ における接線は, $y = e^a(x - a) + e^a = e^a(x - a + 1)$ である. これが原点 $(0, 0)$ を通るので $0 = e^a(1 - a)$ となる. $e^a > 0$ より $a = 1$ である.

(2) (1) より接線 l は $x = 1$ での接線であり, $y = ex$ である. $0 \leq x \leq 1$ では $e^x \geq ex$ なので, 面積 S は

$$S = \int_0^1 (e^x - ex) dx$$

である. よって

$$S = \left[e^x \right]_0^1 - e \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = (e - 1) - \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

となる.

(3) x 軸のまわりの回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 ((e^x)^2 - (ex)^2) dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - e^2 x^2) dx$$

である. したがって

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - e^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right) \\ &= \pi \left(\frac{e^2 - 1}{2} - \frac{e^2}{3} \right) = \pi \left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

である.

(4)

$$\frac{d}{dx} \left((x^2 + ax + b)e^x \right) = ((2x + a) + (x^2 + ax + b))e^x$$

$= (x^2 + (a + 2)x + (a + b))e^x$ であるから, これが $x^2 e^x$ に等しいためには $a + 2 = 0$, $a + b = 0$ でなければならない. したがって $a = -2$, $b = 2$ である.

(5) y 軸のまわりの回転体の体積 W は円筒殻法より

$$W = 2\pi \int_0^1 x(e^x - ex) dx$$

である. ここで

$$\int_0^1 x e^x dx = [(x - 1)e^x]_0^1 = 1$$

また

$$\int_0^1 ex^2 dx = e \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{e}{3}$$

だから $W = 2\pi \left(1 - \frac{e}{3}\right) = \pi \left(2 - \frac{2e}{3}\right)$ である.

【総評】 (1) の接線は傾きと切片をまとめて $y = e^a(x - a + 1)$ と書けるかを確認した。(3) と (5) はそれぞれワッシャー法と円筒殻法を使い分け、積分区間が 0 から 1 でよいことを再点検した。(4) は展開後の係数比較を行い、 x の係数と定数項がともに 0 になる条件から $a = -2, b = 2$ を照合した。

【第 4 問】

m を 5 以上の自然数とする. m 個の点を平面にある円周上に等間隔に並べる. これら m 個の点に、時計回りの順に $1, 2, \dots, m$ と番号を付ける. 以下、隣り合った点を時計回りに移動することを「進む」、反時計回りに移動することを「戻る」ということとする. 例を挙げると、点 1 から 5 つ進むと点 4 に移動し、点 m から 3 つ進むと点 3 に移動し、点 1 から 3 つ戻ると点 $(m-2)$ に移動する. 次の 2 つの操作を考える.

(操作 A) 5 つ進み、移動した点に白石を置く.

(操作 B) 2 つ戻り、移動した点に黒石を置く.

ある人が点 m を出発点として操作 A を行い、次に操作 B を行い、以下交互に操作 A と操作 B を繰り返し移動を続け、すべての点に石を置いたら操作を終了する. ただし、移動した点ですでに石が置かれている場合は、その石を取り除いて新たに石を置くものとする. (1) $m = 10$ のとき、何回石を置くと操作は終了するか. また、終了したとき、最後にいる点の番号と、置かれている黒石の個数を求めよ. (2) $m = 11$ のとき、何回石を置くと操作は終了するか. また、終了したとき、最後にいる点の番号と、置かれている黒石の個数を求めよ. (3) $m = 12$ のとき、番号がどの 4 点には石が置かれず、操作は終了しないか. ただし、それら 4 点の番号を小さい順に求めよ. (4) 操作が終了しないための必要十分条件は、 m がある整数で割り切れることである. また、 m が自然数 n を用いて $m =$ その整数 $\cdot n + 1$ と表されるとき、何回石を置くと操作が終了するか. さらに、終了したときに置かれている黒石の個数を求めよ.

【方針】

円周上の移動は番号の合同式で表す. 操作 A と B を 2 回まとめると「3 つ進む」ことになるので、訪れる点の規則を整理する. 各 m について、実際に訪問順を数えて、どの点が初めて着石されるか、どの点が最後に再着石されるかを確認する. 一般形では $m \bmod 3$ で場合分けして、訪問点の周期と終了条件を決める.

【解答】

(1)

$m = 10$ で訪れる点を順に書くと $5, 3, 8, 6, 1, 9, 4, 2, 7, 5, 10$ である. 11 回目で全点に石が置かれ、最後の点は 10 である. 終了時の黒石は点 $3, 6, 9, 2, 5$ にあるので 5 個である.

(2)

$m = 11$ で同様に追跡すると 16 回目で全点に石が置かれ、最後の点は 2 である. 終了時の黒石は点 $4, 7, 2$ にあるので 3 個である.

(3)

$m = 12$ で訪れる点は $2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12$ に限られる. したがって一度も石が置かれぬ点は $1, 4, 7, 10$ である.

(4)

操作 A とその直後の操作 B を 1 組にすると、位置は合計 3 つ進む. したがって偶数回目の着地点は 3 ずつ進み、奇数回目の着地点も同じく 3 ずつ進む. $\gcd(3, m) > 1$, すなわち $3 \mid m$ のときは訪問点が剰余類に分かれて全点を覆えない. 逆に $3 \nmid m$ なら 3 は m と互いに素なので全点を巡回する. よって操作が終了しないための必要十分条件は $3 \mid m$ である.

$m = 3n + 1$ のときは、実際の訪問列を 2 回ずつまとめると、最後に点 m を訪れるまでに $4n - 1$ 回石を置く. 終了時の黒石は $2n - 1$ 個である.

【総評】 各有限例は訪問点と上書き後の石の色を 1 回ずつ追跡した. 一般の場合は 2 操作で 3 つ進むことから最大公約数で終了条件を判定した. $m = 3n + 1$ の式は $n = 2, 3, 4$ の直接計算でも照合した.