

上智大学 2017 年度 TEAP1 数学 (AM)

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 不等式

$$x^{\log_3 x^3} \geq \left(\frac{27}{x^2}\right)^3$$

を解け。

(2) $f(x) = x^2 + 3x$ とし、方程式 $f(x) = 0$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 $a < \alpha, \beta < b$ を満たす実数 a, b に対して

$$\int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b f(x) dx$$

の値を求めよ。

(3) 次の各命題で、前件が後件であるための必要条件・十分条件の関係を選択肢から選べ。

(i) $x + y > 0$ であることと、 $xy > 0$ であること。

(ii) $x^2 + y^2 > 2xy$ であることと、 $x \neq y$ であること。

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 2x^2 + 7x + 12, & x \leq -1, \\ x^3 + 2x^2 - 7x - 4, & -1 < x \leq 2, \\ \left|\frac{1}{2}x^2 - 6x + 16\right| - 8, & 2 < x \end{cases}$$

に対し、 $x = 4, 8$ で $f(x)$ が最小値をとること。

選択肢は (a) 必要だが十分でない, (b) 十分だが必要でない, (c) 必要十分, (d) 必要でも十分でもない, とする。

【方針】

(1) 真数条件を確認して底 3 の対数をとる。(2) $f(x) < 0$ となる区間だけが差に寄与する。(3) (i) は反例を 2 方向に作り, (ii) は平方差に直し, (iii) は区間ごとの導関数から最小点を比較する。

【解答】

(1) 真数条件から $x > 0$ である。両辺は正なので底 3 の対数をとると

$$3(\log_3 x)^2 \geq 3(3 - 2\log_3 x) \iff (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 3) \geq 0.$$

よって $\log_3 x \leq -3$ または $\log_3 x \geq 1$ であり、 $0 < x \leq 1/27$ または $x \geq 3$ である。

(2) $\alpha = -3, \beta = 0$ であり、 $(-3, 0)$ では $f(x) < 0$ である。したがって求める差は

$$-2 \int_{-3}^0 (x^2 + 3x) dx = 9.$$

(3) (i) $x + y > 0 \Rightarrow xy > 0$ には $(x, y) = (2, -1)$, 逆向きには $(-1, -1)$ が反例となるので (d)。(ii) $x^2 + y^2 > 2xy \iff (x - y)^2 > 0 \iff x \neq y$ より (c)。

(iii) 各区間で増減を調べると、最小値の候補は $x = -7/3, 1, 4, 8$ である。 $f(1) = f(4) = f(8) = -8$, $f(-7/3) = -68/27 > -8$ だから、 $x = 4, 8$ は最小点である。一方 $x = 1$ も最小点なので、これは十分だが必要ではない。よって (b)。

【第 2 問】

直線 PQ が点 A を中心とする円 C に点 P で接している。円 C 上の点 R について $\theta = \angle QPR$ とおき、 $\angle QPS = 2\theta$ となる円 C 上の点を S とする。ただし

$$0 < \theta < \pi, \quad PR = 1, \quad PS = 2 \cos 2\theta + 3 \cos \theta - 1$$

とする。

(1) $\cos \theta$ と PS を求めよ。

(2) $0 < a \leq 1/2$ とし、線分 PS を $a : (1-a)$ に内分する点を T とする。直線 RT と円 C のもう 1 つの交点を U とする。 $RT = TU$ のとき、 a, RT, SU を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで、直線 AR と線分 SU の交点を V 、直線 AR と線分 PS の交点を W とする。 SW, SV, UV を求めよ。

【方針】

接弦定理から $\triangle RPS$ が二等辺になることを使い、余弦定理で $\cos \theta$ を決める。(2) は方べきと余弦定理、(3) は円周角と相似・ベクトルの内分表示で長さを求める。

【解答】

(1) 接弦定理より $\angle QPR = \angle PSR = \theta$ であるから $RP = RS = 1$ である。 $\triangle RPS$ に余弦定理を用いると

$$PS^2 = RP^2 + RS^2 - 2RP \cdot RS \cos(\pi - 2\theta) = 4 \cos^2 \theta.$$

$PS > 0$ と条件式を合わせると $4 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 2 \cos \theta$ である。許される解は $\cos \theta = 3/4$ で、 $PS = 3/2$ となる。

(2) 方べきの定理と $RT = TU$ より

$$RT^2 = PT \cdot TS = a(1-a)PS^2 = -\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}a.$$

一方、 $\angle RPS = \theta$ なので余弦定理から $RT^2 = PT^2 + PR^2 - 2PT \cdot PR \cos \theta = 9a^2/4 - 9a/4 + 1$ である。両式を等置すると $(3a-1)(3a-2) = 0$ となり、 $0 < a \leq 1/2$ から $a = 1/3$ 。したがって $RT = \sqrt{2}/2$ である。

$\triangle RTP$ と $\triangle STU$ は相似で、 $SU : PR = TU : TP$ だから $SU = \sqrt{2}$ である。

(3) $\triangle RPS$ は $RP = RS$ の二等辺三角形なので $SW = SP/2 = 3/4$ である。さらに $\overrightarrow{RW} = \alpha \overrightarrow{RV}$ とおき、 $\overrightarrow{RV}$ を $\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RS}$ で 2 通りに表すと $\alpha = 5/3$ を得る。よって $SV = (3/5)SU = 3\sqrt{2}/5$ 、 $UV = (2/5)SU = 2\sqrt{2}/5$ である。

【第 3 問】

容器 A, B にそれぞれ粘土が 1 kg ずつ入っている。1 日ごとに重さを計測し、その後、容器 A の粘土の $1/4$ を B へ、容器 B の粘土の $1/10$ を A へ同時に移す。 n 日目の計測時点での重さをそれぞれ a_n, b_n (kg) とする。

(1) a_3, b_3 を既約分数で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $2a_n \leq b_n$ となる最小の n を求めよ。

必要なら $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 1.3 = 0.1139$ を用いてよい。

【方針】

同時移動から 2 本の一次漸化式を立てる。総量 $a_n + b_n = 2$ を使って 1 本にし、定常値を引いて等比数列に直す。最後は一般項を不等式へ代入して対数をとる。

【解答】

(1) 漸化式は

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{10}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{9}{10}b_n$$

である。 $a_1 = b_1 = 1$ から $a_2 = 17/20$, $b_2 = 23/20$, さらに $a_3 = 301/400$, $b_3 = 499/400$ となる。

(2) $a_n + b_n = 2$ なので

$$a_{n+1} = \frac{13}{20}a_n + \frac{1}{5}, \quad a_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{13}{20} \left(a_n - \frac{4}{7} \right).$$

よって

$$a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1}, \quad b_n = \frac{10}{7} - \frac{3}{7} \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1}.$$

(3) $2a_n \leq b_n$ は

$$\left(\frac{13}{20} \right)^{n-1} \leq \frac{2}{9}$$

と同値である。常用対数を用いると $(n-1)\log_{10}(20/13) \geq \log_{10}(9/2)$ であり, $n-1 \geq 3.49\dots$ を得る。したがって最小の n は 5。