

上智大学 2017 年度 TEAP2 数学 (PM)

解答

全 4 問

【第 1 問】

$AB = AC = 1$, $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC を底面とする高さ 3 の三角柱を考え、上面を PQR とする。辺 AP, BQ 上の点 A', B' について $AA' = a$, $BB' = b$ とおく。

(1) $A'C, A'B', B'C$ を a, b で表せ。

以下, $\angle A'B'C = 90^\circ$ とする。

(2) a, b が満たす関係式を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

(4) $\triangle A'B'C$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

【方針】

各辺を三平方の定理で表す。(2) は $\triangle A'B'C$ に三平方の定理を使う。(3) は $0 \leq a \leq 3$ を関係式へ代入する。(4) は面積の平方を b の関数にして微分する。

【解答】

(1) 三平方の定理より

$$A'C = \sqrt{a^2 + 1}, \quad A'B' = \sqrt{(a-b)^2 + 1}, \quad B'C = \sqrt{b^2 + 2}.$$

(2) $A'C^2 = A'B'^2 + B'C^2$ より $b^2 - ab + 1 = 0$ である。

(3) $b > 0$ で $a = b + 1/b$ である。 $a \leq 3$ は $b^2 - 3b + 1 \leq 0$ と同値だから

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq b \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

(4) 面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} A'B' \cdot B'C = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 3 + \frac{2}{b^2}}.$$

$g(b) = b + \sqrt{2}/b$ とおくと, 平方根内は $g(b)^2 + 3 - 2\sqrt{2}$ である。 $g'(b) = (b + \sqrt[4]{2})(b - \sqrt[4]{2})/b^2$ だから, 最小値は $b = \sqrt[4]{2}$ のとき $(1 + \sqrt{2})/2$ 。端点を比較すると最大値は $b = (3 - \sqrt{5})/2$ のとき

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{27 + 3\sqrt{5}}{2}}.$$

【第 2 問】

c, d を正の実数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = d, \quad x_{n+1} = x_n^2 + c \quad (n \geq 1)$$

で定める。

(1) $c > 1/4$ とする。

(i) すべての自然数 n に対して $x_n < x_{n+1}$ を示せ。

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ を示せ。

(2) $c < 1/4$ とする。2 次方程式 $x^2 - x + c = 0$ の 2 つの異なる実数解を α, β とする。 $\alpha < d < \beta$ のとき、すべての自然数 n に対して

$$\alpha < x_n < \beta, \quad x_n > x_{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

【方針】

(1)(i) 差を平方完成する。(ii) 発散する等差数列を下から作り、帰納法で比較する。(2) α, β の解と係数の関係を使い、区間内かつ単調減少であることを帰納する。

【解答】

(1)(i)

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + c = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} > 0.$$

よってすべての自然数 n で $x_n < x_{n+1}$ である。

(1)(ii) $y_1 = d, y_{n+1} = y_n + (c - 1/4)$ とおくと $y_n = d + (c - 1/4)(n - 1) \rightarrow \infty$ である。 $x_1 = y_1$ であり、 $x_k \geq y_k$ なら

$$x_{k+1} - y_{k+1} = x_k^2 - y_k + \frac{1}{4} \geq y_k^2 - y_k + \frac{1}{4} = \left(y_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

数学的帰納法より $x_n \geq y_n$ だから、 $x_n \rightarrow \infty$ である。

(2) $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = c$ であり、 $\alpha, \beta > 0$ である。 $x_1 = d$ では主張が成り立つ。 $\alpha < x_k < \beta$ かつ $x_k > x_{k+1}$ と仮定すると

$$x_{k+1} - \alpha = x_k^2 - \alpha + c > x_k^2 - \alpha + c \Big|_{x_k=\alpha} = 0,$$

また

$$\beta - x_{k+1} = \beta - x_k^2 - c = (\beta - x_k)(\beta + x_k - 1) > 0$$

である。さらに

$$x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1}^2 - x_{k+1} + c = (x_{k+1} - \alpha)(x_{k+1} - \beta) < 0.$$

したがって $\alpha < x_{k+1} < \beta$ かつ $x_{k+1} > x_{k+2}$ であり、帰納法で示された。

【第 3 問】

$n \geq 6$ とする。1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードから同時に 3 枚を引くとき、3 枚の最小の数字が 3 である確率を p_n とする。

- (1) p_6, p_7 を求めよ。
- (2) p_n を n の式で表せ。
- (3) $p_n < p_{n+1}$ となる最大の n と、 $p_n = p_{n+1}$ となる n を求めよ。
- (4) p_n が最大値をとる n と、その最大値を求めよ。

【方針】

最小値を 3 に固定し、残り 2 枚を $4, \dots, n$ から選ぶ。(3) は隣接項の大小を有理式のまま比較し、(4) は増減結果を使う。

【解答】

(1) 全事象は ${}_nC_3$ 通りで、最小値が 3 となる選び方は ${}_{n-3}C_2$ 通りである。よって $p_6 = 3/20$, $p_7 = 6/35$ 。

(2)

$$p_n = \frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_3} = \frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}.$$

(3) 正の因子を払って比較すると

$$p_n < p_{n+1} \iff (n+1)(n-4) < (n-2)^2 \iff n < 8.$$

したがって最大の n は 7 であり、 $p_n = p_{n+1}$ となるのは $n = 8$ 。

(4) (3) より p_n は $n = 8, 9$ で最大となり、

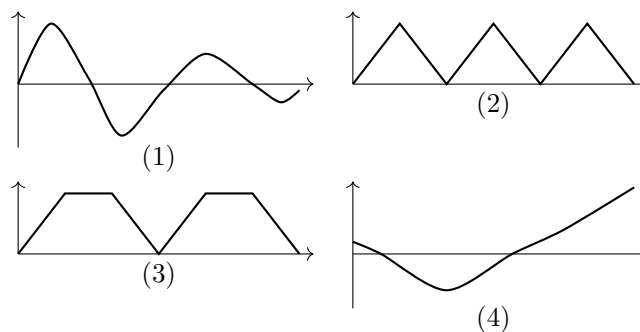
$$p_8 = p_9 = \frac{5}{28}.$$

【第 4 問】

下の各図 (1)–(4) は $0 \leq x \leq 6$ における関数 $y = f(x)$ の概形を表す。各々について

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

のグラフとしてふさわしいものを選択肢 (a)–(j) から選べ。



選択肢の概形は次の通りである。

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) 常に増加し、 $x = 1, 3, 5$ 付近で傾きが最大 | (b) 常に増加し、 $x = 1, 3, 5$ 付近で傾きが最小 |
| (c) 常に増加し、折れ線を含む | (d) 極大・極小を繰り返すが常に $F(x) > 0$ |
| (e) 負から正、最後に負へ変化 | (f) 増加と水平部分を繰り返す折れ線 |
| (g) 常に増加し、傾きが一定の区間を含む | (h) 正の小さな山を減衰させながら繰り返す |
| (i) 正負を繰り返し 0 へ近づく | (j) 極大の後に極小をもち、最後は増加 |

【方針】

$F'(x) = f(x)$ なので f の符号から F の増減を読む。また $F''(x) = f'(x)$ から凹凸を判断し、必要に応じて f と x 軸に囲まれる符号付き面積を比較する。

【解答】

基本事項は $F'(x) = f(x)$ であり、 $F(x)$ は 0 から x までの符号付き面積である。

(1) f の符号が交互に変わるので F は極大・極小を繰り返す。ただし最初の正の面積が最も大きく、全体として正に保たれる。よって (d)。

(2) $f \geq 0$ なので F は単調増加し、 $x = 1, 3, 5$ で傾きが最大、 $x = 0, 2, 4, 6$ で傾きが 0 となる。よって (a)。

(3) $f \geq 0$ なので F は単調増加する。 f が一定の区間では F は直線になるため (g)。

(4) f は正・負・正の順に符号を変えるため、 F は極大・極小を 1 つずつもち、最後は増加する。よって (j)。