

上智大学 2018 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

座標平面上に原点 O と点 $A(1, 0)$ がある。点 P は、 $\angle PAO = 2\angle POA$ を満たしながら y 座標が正の範囲を動く。

- (1) 点 P の軌跡を求めよ。(2) 実数 k を動かし、 P から直線 $x = k$ に垂線 PH を下す。 $\frac{PH}{AP}$ が常に一定の値であるとき、その値を求めよ。(3) $\angle PAO = \theta$ とするとき、 AP を $\cos \theta$ を用いて表せ。

【方針】

角条件を $\tan$ で座標に直して軌跡を求める。次に、直線 $x = k$ への距離と軌跡上の式を用いて比が一定となる k を定める。最後に、三角形 OAP で正弦定理を用いて AP を $\cos \theta$ で表す。

【解答】

(1) 点 $P(x, y)$ とする。 $\theta = \angle POA$ とおくと、 $y > 0$ より $0 < \theta < \pi/2$ であり、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ である。また、 $\angle PAO = 2\theta$ より $\tan 2\theta = \frac{y}{1-x}$ だから $\frac{y}{1-x} = \frac{2(y/x)}{1-(y/x)^2} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ となる。よって $x^2 - y^2 = 2x(1-x)$ すなわち $3x^2 - 2x - y^2 = 0$ である。したがって $y^2 = 3x^2 - 2x$, $y > 0$, $x \geq \frac{2}{3}$ が軌跡である。

(2) 直線 $x = k$ への距離は $PH = |x - k|$ である。軌跡上では $y^2 = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ であり、また $AP^2 = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + 3x^2 - 2x = (2x-1)^2$ だから、軌跡上では $AP = 2x - 1$ ($x \geq \frac{2}{3}$) である。よって $\frac{PH}{AP} = \frac{|x-k|}{2x-1}$ が全ての点 P で一定となるためには、 $k = \frac{1}{2}$ である必要がある。このとき $\frac{PH}{AP} = \frac{x-\frac{1}{2}}{2x-1} = \frac{1}{2}$ となる。

(3) $\angle PAO = \theta$ とすると、 $\angle POA = \theta/2$ 、よって $\angle OPA = \pi - \frac{3\theta}{2}$ である。正弦定理より $\frac{AP}{\sin(\theta/2)} = \frac{OA}{\sin(3\theta/2)}$ なので、 $OA = 1$ を用いて $AP = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(3\theta/2)}$ である。ここで $\sin 3u = \sin u(1 + 2\cos 2u)$ を $u = \theta/2$ に適用すると $\sin(3\theta/2) = \sin(\theta/2)(1 + 2\cos \theta)$ だから $AP = \frac{1}{1+2\cos \theta}$ である。

【総評】 (1) は角の取り方を誤ると符号が逆転するので、 $\theta = \angle POA$ として $\tan \theta = y/x$, $\tan 2\theta = y/(1-x)$ を順に確認した。軌跡は方程式だけでなく、 $y > 0$ と $x \geq 2/3$ の枝条件まで含めて照合した。(2) は距離 PH を直線 $x = k$ への垂線距離と解釈し、 $AP = 2x - 1$ の範囲条件を含めて比の一定性を再検算した。(3) は半角の関係と正弦定理を用い、最後に $\sin(3\theta/2)$ の展開が $1 + 2\cos \theta$ になることを確かめた。

【第 2 問】

ある食堂はランチとして A 定食か B 定食のいずれか一方を提供する。A 定食を提供した次の営業日は等しい確率で A 定食か B 定食のどちらかを提供し、B 定食を提供した次の営業日は必ず A 定食を提供する。1 日目には A 定食を提供することがわかっている。(1) 3 日目に A 定食が提供される確率を求めよ。(2) n 日目に A 定食が提供される確率を求めよ。ただし n は 1 以上の整数とする。(3) 6 日目に A 定食が提供されたという条件のもとで、3 日目にも A 定食が提供されていた確率を求めよ。(4) 1 日目から n 日目までに提供された定食の可能な組合せのうち、 n 日目が A 定食であるものの総数を a_n とする。このとき a_5 を求め、また、1 日目から 10 日目までに提供される定食の可能な組合せの総数を求めよ。

【方針】

A が出る確率を n 日目で p_n とおき、遷移から漸化式を立てる。定常値を見つけて一般項を求め、条件付き確率は 3 日目を起点に考える。最後に、末尾が A か B かで個数を数え上げる。

【解答】

(1) n 日目に A 定食が提供される確率を p_n とする。すると $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + (1-p_n) = 1 - \frac{1}{2}p_n$ である。初期条件は $p_1 = 1$ だから $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ より、求める確率は $\frac{3}{4}$ である。

(2) 漸化式 $p_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}p_n$ の不動点は $p = \frac{2}{3}$ である。そこで $q_n = p_n - \frac{2}{3}$ とおくと

$$q_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2}p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}q_n$$

となる。したがって $q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} q_1$ であり、 $q_1 = \frac{1}{3}$ だから $p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

(3) 3 日目に A 定食が提供されていたとき、そこから 3 回遷移して 6 日目に A 定食となる確率を求めればよい。よって $P(3 \text{ 日目 A かつ } 6 \text{ 日目 A}) = P(3 \text{ 日目 A}) P(6 \text{ 日目 A} \mid 3 \text{ 日目 A})$ である。ここで $P(3 \text{ 日目 A}) = \frac{3}{4}$, $P(6 \text{ 日目 A} \mid 3 \text{ 日目 A}) = \frac{5}{8}$ だから $P(3 \text{ 日目 A かつ } 6 \text{ 日目 A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$ である。また $P(6 \text{ 日目 A}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{21}{32}$ より、求める条件付き確率は $\frac{15/32}{21/32} = \frac{5}{7}$ である。

(4) 1 日目から n 日目までの並びのうち、 n 日目が A であるものの個数を a_n , B であるものの個数を b_n とする。すると $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n$ である。よって $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ を得る。

初期値は $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ であるから $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$ となり、 $a_5 = 5$ である。

また、1 日目から 10 日目までの可能な組合せの総数は、同じ漸化式で順に 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 となるので 89 である。

【総評】 (2) は不動点 $2/3$ を基準にした漸化式変形が核心で、初期値 $p_1 = 1$ との差が $(-1/2)^{n-1}$ で減衰する形を確認した。(3) は条件付き確率の向きを取り違えやすいので、 $P(3 \text{ 日目 A} \mid 6 \text{ 日目 A})$ をベイズの式で再計算し、分子 $15/32$, 分母 $21/32$ から $5/7$ になることを照合した。(4) は確率ではなく個数の漸化式として扱い、 a_n と総数を混同しないよう初期値から順に数え上げた。

【第 3 問】

座標空間において、原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円が xy 平面上にある。この円を底面とし、 $A(0, 0, \sqrt{2})$ を頂点とする円錐を考える。 A と底面の円周上の点 $B(-\sqrt{2}, 0, 0)$ を結ぶ線分 AB の中点を C とする。点 P は線分 CA 上を動き、 $CP = a$ とする。 P を通り、線分 AB と垂直に交わる平面でこの円錐を切ったときの断面積を $S(a)$ とする。(1) $S(0)$ を求めよ。(2) $S(a)$ が最大となる a を求め、そのときの $S(a)$ を求めよ。(3) C を通り、線分 AB と垂直に交わる平面で円錐を 2 つの立体に分けると、頂点 A を含む方の立体の体積を求めよ。

【方針】

母線 AB の長さ AB と C の位置を確認し、切断面の面積を P の位置 a で表す。面積関数を微分して最大値を求める。体積は断面積を高さ方向に積分して求める。

【解答】

母線 AB の長さは $AB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ である。 C はその中点なので $AC = CB = 1$ である。

(1) $a = 0$, すなわち $P = C$ のときの断面積は $S(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ である。

(2) $CP = a$ より $AP = 1 - a$ である。断面積は $S(a) = \frac{4\sqrt{2}}{3} (1 - a)^{1/2} (1 + a)^{3/2}$ と表される。これを微分すると $\frac{S'(a)}{S(a)} = -\frac{1}{2(1-a)} + \frac{3}{2(1+a)}$ であるから、極値条件は $-\frac{1}{1-a} + \frac{3}{1+a} = 0$ となる。よって $a = \frac{1}{2}$ であり、そのとき

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{6}$$

である。

(3) C を通り AB に垂直な平面で円錐を分けると、頂点 A を含む部分の体積は断面積を積分して求められる。相似関係より、必要な積分を実行すると $V = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)$ となる。

【総評】 (1) は中点 C の位置から断面積の基準値を取り違えないよう確認し、 $AB = 2$ と $AC = 1$ を先に確定した。(2) は端点 $a = 0, 1$ での挙動を点検し、微分後に $a = 1/2$ で最大となることを再計算した。(3) は全体の体積公式に頼りすぎず、切断位置 C に対応する積分値として式が整合するかを確認した。

【第 4 問】

座標平面において、方程式

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$$

の表す曲線 C を考える。(1) C 上の点 P と 2 点 $A(a, a)$, $B(-a, -a)$ ($a > 0$) との距離の積 $PA \cdot PB$ が常に一定の値であるとき、 a と $PA \cdot PB$ を求めよ。(2) 極座標 (r, θ) に関する C の極方程式が $r^s = \sin(t\theta)$ と表されるとき、 s と t を求めよ。(3) C の概形として最もふさわしいものを次から選べ。(4) C 上の点で x 座標が最大である点 M の偏角を θ_0 ($0 \leq \theta_0 < 2\pi$) とするとき、 θ_0 を求めよ。(5) M を通り y 軸に平行な直線を l とする。 C 上の点を極座標で (r, θ) と表すとき、 C の $0 \leq \theta \leq \theta_0$ の部分と x 軸、および l で囲まれた部分の面積を求めよ。(6) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

【方針】

極座標に直して曲線の形を読み取る。次に、 x 座標最大化を $r \cos \theta$ の最大化に帰着して偏角を求める。面積は極座標の面積公式を用い、必要な範囲を分けて計算する。

【解答】

(1) 点 $P(x, y)$ を C 上の点とする。すると $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ である。点 $A(a, a)$, $B(-a, -a)$ について $PA^2 = (x - a)^2 + (y - a)^2 = x^2 + y^2 + 2a^2 - 2a(x + y)$ $PB^2 = (x + a)^2 + (y + a)^2 = x^2 + y^2 + 2a^2 + 2a(x + y)$ だから $(PA \cdot PB)^2 = (x^2 + y^2 + 2a^2)^2 - 4a^2(x + y)^2$ である。これが P に依らず一定となるためには $a = \frac{1}{2}$ でなければならない。実際、このとき $PA \cdot PB = \frac{1}{2}$ である。

(2) 極座標で $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと $(x^2 + y^2)^2 = r^4$, $2xy = 2r^2 \cos \theta \sin \theta = r^2 \sin 2\theta$ より $r^4 = r^2 \sin 2\theta$ となる。 $r \geq 0$ で原点以外では $r^2 = \sin 2\theta$ であるから $s = 2$, $t = 2$ である。

(3) $r^2 = \sin 2\theta$ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ および $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ で現れる。したがって、原点を通る 2 つのループをもつ図形であり、該当する概形は F である。

(4) $x = r \cos \theta$ の最大値を考える。 $r^2 = \sin 2\theta$ より $x^2 = \sin 2\theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta \cos^3 \theta$ である。これを微分すると $\frac{d}{d\theta}(x^2) = 2 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)$ となるので、極値条件は $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。よって $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ である。

(5) 求める部分の面積は、極座標の面積公式より

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \sin 2\theta d\theta$$

である。したがって $\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{8}$ となる。

(6) 曲線 C で囲まれた部分の面積は

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta$$

であり、

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 1$$

だから、求める面積は 1 である。

【総評】 (2) は r^4 と r^2 を取り違えないことが最重要で、 $r \geq 0$ より $\sin 2\theta \geq 0$ の範囲を確かめた。(4) は $x = r \cos \theta$ の最大化で、 x^2 を微分して得た臨界点と端点の値を照合した。(5)(6) は極座標面積公式の係数 $1/2$ を落としやすいため、積分区間と対称性を確認して最終値を検算した。