

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2019 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

O を原点とする座標空間に、2 点 $A(-1, 2, 2\sqrt{2})$, $B(0, 2, \sqrt{2})$ がある. (1) 平面 $y = -1$ 上の点 P が $OA \perp OP$ かつ $OB \perp OP$ を満たすとき、 P の座標、 $\cos \angle BAP$ 、および三角形 ABP の面積を求めよ. (2) 点 Q が $AQ = BQ$ かつ $OQ = \sqrt{6}$ を満たしながら動くとする. このとき、 Q の y 座標の最大値、 Q の x 座標の最大値、および Q の軌跡の円の半径を求めよ.

第 2 問

実数からなる無限数列 $\{a_n\}$ に対して次の条件 p を考える.

p :『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』

(1) 次の数列のうち, 条件 p を満たすものをすべて選べ. $A. \{n\}, B. \left\{\frac{8}{n}\right\}, C. \left\{(-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right)\right\},$
 $D. \{\log n\}, E. \left\{\frac{n^2 - 3}{n + 2}\right\}, F. \{3 \sin n\}$

(2) 次の条件 q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 を考える. q_1 : すべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ である. q_2 : 集合 $\{n \mid a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が空集合または有限集合である. q_3 : 集合 $\{n \mid a_n \leq 2, n \text{ は自然数}\}$ が無限集合である. q_4 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ である. q_5 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である.

それぞれが p に対して必要条件か十分条件か, あるいはそのどちらでもないかを判定せよ.

(3) p の否定, および次の条件 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ を考える. r_1 : $a_n > 2$ を満たす自然数 n が存在する. r_2 : 集合 $\{n \mid a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が無限集合である. r_3 : 集合 $\{n \mid a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が空集合ではなく, かつ, この集合に最大の要素が存在しない. r_4 :『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n > 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』 r_5 :『 N 以下のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』 r_6 :『 N 以下のすべての自然数 n に対して $a_n > 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』

それぞれが p に対して必要条件か十分条件か, あるいはそのどちらでもないかを判定せよ.

第 3 問

$\alpha = \log_2 3$ とし、自然数 n に対して

$$a_n = [n\alpha], \quad b_n = \left[\frac{n\alpha}{\alpha - 1} \right]$$

とする。ただし、実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) a_3 を求めよ。(2) $b_3 = k$ とおくと、不等式

$$\frac{3^{k+c}}{2^k} \leq 1 < \frac{3^{k+1+c}}{2^{k+1}}$$

が整数 c のある値で成り立つ。この c と b_3 を求めよ。(3) $a_n \leq 10$ を満たす自然数 n の個数を求めよ。(4) $b_n \leq 10$ を満たす自然数 n の個数を求めよ。(5) $a_n \leq 50$ を満たす自然数 n の個数を s , $b_n \leq 50$ を満たす自然数 n の個数を t とする。このとき $s+t$ を求めよ。

第 4 問

座標平面において、軸が y 軸と平行な放物線 C は、原点を通り、直線 $\ell: y = -x + 2$ と接している。 C との接点の x 座標を t とし、 t が正の実数を動くとき、 C の頂点 A が描く曲線を D とする。

(1) A の座標を t を用いて表せ。 (2) $0 < t < 4$ のとき、 C と x 軸で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ。 (3) D の接線のうち、接点が第 2 象限にあるものを考える。このとき、接線の傾き k のとりうる値の範囲を求めよ。 (4) D と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 (5) A の座標を (x, y) とするとき、 x, y の間に成り立つ式を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)