

上智大学 2019 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

O を原点とする座標空間に、2 点 $A(-1, 2, 2\sqrt{2})$, $B(0, 2, \sqrt{2})$ がある。(1) 平面 $y = -1$ 上の点 P が $OA \perp OP$ かつ $OB \perp OP$ を満たすとき、 P の座標, $\cos \angle BAP$, および三角形 ABP の面積を求めよ。(2) 点 Q が $AQ = BQ$ かつ $OQ = \sqrt{6}$ を満たしながら動くとする。このとき、 Q の y 座標の最大値, Q の x 座標の最大値, および Q の軌跡の円の半径を求めよ。

【方針】

(1) は内積条件を連立して点 P を決め、その後に $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ を用いて余弦と面積を求める。(2) は $AQ = BQ$ から平面を求め、 $OQ = \sqrt{6}$ との交わりを円として扱う。平面上の円の中心距離から半径を出し、座標の最大値は平方完成で求める。

【解答】

(1) $P = (x, -1, z)$ とおく。

$OA \perp OP$ より $(-1, 2, 2\sqrt{2}) \cdot (x, -1, z) = 0$ すなわち $-x - 2 + 2\sqrt{2}z = 0$ 。また、 $OB \perp OP$ より $(0, 2, \sqrt{2}) \cdot (x, -1, z) = 0$ だから $-2 + \sqrt{2}z = 0$ 。よって $z = \sqrt{2}$ であり、これを代入して $-x - 2 + 4 = 0$ より $x = 2$ 。したがって $P = (2, -1, \sqrt{2})$ である。

次に

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -\sqrt{2}), \quad \overrightarrow{AP} = (3, -3, -\sqrt{2})$$

より $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 5$ 。また $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{5}$ 。したがって $\cos \angle BAP = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$ 。三角形 ABP の面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}| \sin \angle BAP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

(2) $Q = (x, y, z)$ とおく。 $AQ = BQ$ より $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2\sqrt{2})^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-\sqrt{2})^2$ 。整理して $2x - 2\sqrt{2}z + 7 = 0$, $x = \sqrt{2}z - \frac{7}{2}$ 。さらに $OQ = \sqrt{6}$ だから $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 。これに代入すると

$$y^2 = 6 - \left(\sqrt{2}z - \frac{7}{2}\right)^2 - z^2 = \frac{23}{12} - 3\left(z - \frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2.$$

よって y^2 の最大値は $\frac{23}{12}$, したがって y 座標の最大値は $\frac{\sqrt{69}}{6}$ である。このとき

$$z = \frac{7\sqrt{2}}{6}, \quad x = \sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{6} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{6}.$$

次に、 x は $x = \sqrt{2}z - \frac{7}{2}$, $x^2 + z^2 \leq 6$ のもとで最大となる。これより $(x + \frac{7}{2})^2 / 2 + x^2 \leq 6$ すなわち $12x^2 + 28x + 1 \leq 0$ 。したがって x の最大値は $\frac{-7 + \sqrt{46}}{6}$ である。

また、 $AQ = BQ$ の条件は平面 $2x - 2\sqrt{2}z + 7 = 0$ である。原点からこの平面までの距離は $\frac{7}{2\sqrt{3}}$ なので、軌跡の円の半径 r は

$$r = \sqrt{6 - \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{23}{12}} = \frac{\sqrt{69}}{6}.$$

【第 2 問】

実数からなる無限数列 $\{a_n\}$ に対して次の条件 p を考える。

p :『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』

(1) 次の数列のうち、条件 p を満たすものをすべて選べ。A. $\{n\}$, B. $\left\{\frac{8}{n}\right\}$, C. $\left\{(-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right)\right\}$, D. $\{\log n\}$,

E. $\left\{\frac{n^2-3}{n+2}\right\}$, F. $\{3 \sin n\}$

(2) 次の条件 q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 を考える。 q_1 : すべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ である。 q_2 : 集合 $\{n \mid a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が空集合または有限集合である。 q_3 : 集合 $\{n \mid a_n \leq 2, n \text{ は自然数}\}$ が無限集合である。 q_4 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ である。 q_5 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

それぞれが p に対して必要条件か十分条件か、あるいはそのどちらでもないかを判定せよ。

(3) p の否定、および次の条件 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ を考える。 r_1 : $a_n > 2$ を満たす自然数 n が存在する。 r_2 : 集合 $\{n \mid a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が無限集合である。 r_3 : 集合 $\{n \mid a_n > 2, n \text{ は自然数}\}$ が空集合ではなく、かつ、この集合に最大の要素が存在しない。 r_4 :『 N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n > 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』 r_5 :『 N 以下のすべての自然数 n に対して $a_n \leq 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』 r_6 :『 N 以下のすべての自然数 n に対して $a_n > 2$ が成り立つような自然数 N が存在する』

それぞれが p に対して必要条件か十分条件か、あるいはそのどちらでもないかを判定せよ。

【方針】

(1) は各数列が「あるところからずっと 2 以下」になるかを直接判定する。(2) は条件の言い換えを行い、 p と同値か、必要条件か十分条件かを整理する。(3) は p の否定を「どんな N をとっても、その先に 2 を超える項がある」と読み替えて、 r_i ごとに判定する。

【解答】

(1) 各数列について調べる。

A. $a_n = n$ はやがて 2 を超えるので、 p を満たさない。

B. $a_n = \frac{8}{n}$ は、 $n \geq 4$ なら $a_n \leq 2$ である。したがって p を満たす。

C. $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right)$ は、偶数項が正、奇数項が負である。偶数項については $n \geq 4$ で $1 + 3/n \leq 2$ となり、奇数項は常に 2 以下であるから、あるところ以後はすべて 2 以下である。よって p を満たす。

D. $a_n = \log n$ は無限大に発散するので、 p を満たさない。

E. $a_n = \frac{n^2-3}{n+2} = n-2 + \frac{1}{n+2}$ であり、 $n \rightarrow \infty$ で増大するから、 p を満たさない。

F. $a_n = 3 \sin n$ は振動し、2 を超える項が無限に現れる。したがって p を満たさない。

よって、 p を満たすのは B, C である。

(2) それぞれについて判定する。

q_1 は「すべての n で $a_n \leq 2$ 」であるから、 p の十分条件である。しかし、 p が成り立っても最初の有限個で 2 を超えることはあり得るので必要条件ではない。したがって「十分条件であるが必要条件ではない」。

q_2 は $a_n > 2$ となる項が高々有限個であることを述べる。これはちょうど「あるところから先はすべて $a_n \leq 2$ 」という p と同値である。したがって必要十分条件である。

q_3 は $a_n \leq 2$ となる項が無限個あることを述べる。これは p が成り立てば必ず真であるが、 $a_n > 2$ となる項が無限個あっても $a_n \leq 2$ の項も無限個ある場合があるので十分ではない。したがって「必要条件であるが十分条件ではない」。

q_4 は極限が 2 であることを述べる。 p からは極限が 2 とは限らないし、逆に極限が 2 でも途中で何度でも 2 を超えるので、必要でも十分でもない。

q_5 は極限が 1 であることを述べる。これは p を保証する十分条件ではあるが、 p なら極限が 1 とは限らないので必要ではない。

(3) p の否定は

『どの自然数 N に対しても、 N 以上で $a_n > 2$ となる n が存在する』

である。これを用いて判定する。

r_1 は「2 を超える項が 1 つでもある」ことにすぎない. p の否定を導くには弱すぎるし, p の否定から必ず成り立つとも限らない. よってどちらでもない.

r_2 は「2 を超える項が無限個ある」ことであり, これは p の否定と同値である. したがって p に対しては必要条件でも十分条件でもない.

r_3 は「2 を超える項が空でなく, 最大元をもたない」ことである. 自然数の部分集合で最大元をもたない非空集合は無限集合であるから, r_2 と同じく p の否定と同値である.

r_4 は「あるところから先はすべて 2 を超える」ことであり, これは p を明らかに否定する十分条件だが, p の否定全体を表すほど強くはない.

r_5 は「あるところまでの初期項がすべて 2 以下」であり, その後の項には何も言っていないので, p に対してもその否定に対しても決定的ではない.

r_6 は「あるところまでの初期項がすべて 2 を超える」であり, 同様に p と p の否定とも無関係である.

【第 3 問】

$\alpha = \log_2 3$ とし, 自然数 n に対して

$$a_n = [n\alpha], \quad b_n = \left[\frac{n\alpha}{\alpha - 1} \right]$$

とする. ただし, 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

(1) a_3 を求めよ. (2) $b_3 = k$ とおくと, 不等式

$$\frac{3^{k+c}}{2^k} \leq 1 < \frac{3^{k+1+c}}{2^{k+1}}$$

が整数 c のある値で成り立つ. この c と b_3 を求めよ. (3) $a_n \leq 10$ を満たす自然数 n の個数を求めよ. (4) $b_n \leq 10$ を満たす自然数 n の個数を求めよ. (5) $a_n \leq 50$ を満たす自然数 n の個数を s , $b_n \leq 50$ を満たす自然数 n の個数を t とする. このとき $s+t$ を求めよ.

【方針】

$\alpha = \log_2 3$ なので $2^\alpha = 3$ を用いる. 床関数の条件は不等式に直して個数を数える. b_n は $\alpha/(\alpha-1)$ を整理して指数の比較に帰着させると, n の範囲が整数で決まる.

【解答】

(1) $\alpha = \log_2 3$ より $2^\alpha = 3$. したがって $3\alpha \approx 4.75$ だから $a_3 = [3\alpha] = 4$.

(2) $b_3 = k$ とすると $k \leq \frac{3\alpha}{\alpha-1} < k+1$. ここで $\alpha = \log_2 3$ なので $\frac{\alpha}{\alpha-1} \approx 2.71$ より $b_3 = [3 \cdot 2.71 \dots] = 8$. したがって $k = 8$ である.

与えられた不等式は $\frac{3^{k+c}}{2^k} \leq 1 < \frac{3^{k+1+c}}{2^{k+1}}$ であるから, 左側は $3^{k+c} \leq 2^k$ と同値である. $k = 8$ を代入すると $3^{8+c} \leq 2^8 < \frac{3^{9+c}}{2}$. これを満たす整数は $c = -3$ である. 実際, $3^5 = 243 \leq 256 < \frac{3^6}{2} = 364.5$ となる.

(3) $a_n = [n\alpha] \leq 10$ は $n\alpha < 11$ と同値である. よって $n < \frac{11}{\alpha}$. $\alpha \approx 1.58$ だから $\frac{11}{\alpha} \approx 6.9$ となり, 該当する自然数は $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の 6 個である.

(4) $b_n = \left[\frac{n\alpha}{\alpha-1} \right] \leq 10$ は $\frac{n\alpha}{\alpha-1} < 11$ と同値である. したがって $n < 11 \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha}$. $\alpha \approx 1.58$ より $11 \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \approx 4.1$ なので, 該当する自然数は $n = 1, 2, 3, 4$ の 4 個である.

(5) (3) と同様に $a_n \leq 50 \iff n\alpha < 51$ だから $n < \frac{51}{\alpha}$. $\alpha \approx 1.58$ より $\frac{51}{\alpha} \approx 32.1$ なので, $s = 32$.

また $b_n \leq 50 \iff \frac{n\alpha}{\alpha-1} < 51$ より $n < 51 \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha}$. $\alpha \approx 1.58$ から $51 \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \approx 18.8$ となるので $t = 18$. したがって $s+t = 50$.

【第 4 問】

座標平面において、軸が y 軸と平行な放物線 C は、原点を通り、直線 $\ell: y = -x + 2$ と接している。 C との接点の x 座標を t とし、 t が正の実数を動くとき、 C の頂点 A が描く曲線を D とする。

- (1) A の座標を t を用いて表せ。(2) $0 < t < 4$ のとき、 C と x 軸で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ。(3) D の接線のうち、接点が第 2 象限にあるものを考える。このとき、接線の傾き k のとりうる値の範囲を求めよ。(4) D と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。(5) A の座標を (x, y) とするとき、 x, y の間に成り立つ式を求めよ。

【方針】

放物線を $y = ax^2 + bx$ とおいて、原点通過と接線条件から係数を決める。頂点の座標を t で表し、それを消去して軌跡 D の式を求める。面積は求まった放物線の式を積分して出し、最大値は t の関数として微分する。

【解答】

(1) C は軸が y 軸に平行で原点を通るから $y = ax^2 + bx$ とおける。接点の x 座標が t で、そのときの接線が $\ell: y = -x + 2$ であるから $f(t) = 2 - t$, $f'(t) = -1$ が成り立つ。

ここで $f(x) = ax^2 + bx$ とすると $f'(x) = 2ax + b$ 。したがって $2at + b = -1$, $at^2 + bt = 2 - t$ 。1 つ目から $b = -1 - 2at$ 、これを 2 つ目に代入して $at^2 + t(-1 - 2at) = 2 - t$ より $-at^2 = 2$ 。ゆえに $a = -\frac{2}{t^2}$, $b = -1 + \frac{4}{t}$ 。よって放物線は $y = -\frac{2}{t^2}x^2 + \left(-1 + \frac{4}{t}\right)x$ である。

頂点の x 座標は $-\frac{b}{2a} = \frac{t(4-t)}{4}$ であり、そのときの y 座標は $-\frac{b^2}{4a} = \frac{(4-t)^2}{8}$ である。したがって $A\left(\frac{t(4-t)}{4}, \frac{(4-t)^2}{8}\right)$ である。

(2) 放物線 C の x 軸との交点は、 $y = x\left(-\frac{2}{t^2}x - 1 + \frac{4}{t}\right)$ より $x = 0$ と $x = \frac{t(4-t)}{2}$ である。 $0 < t < 4$ では後者は正なので、囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{t(4-t)}{2}} \left(-\frac{2}{t^2}x^2 + \left(-1 + \frac{4}{t}\right)x\right) dx$$

である。計算すると $S = \frac{t(4-t)^3}{24}$ 。よって $S(t) = \frac{t(4-t)^3}{24}$ とおける。これを微分すると $S'(t) = \frac{(4-t)^2(1-t)}{6}$ であるから、 $0 < t < 4$ において最大は $t = 1$ のときに生じる。その値は $S(1) = \frac{9}{8}$ である。

(3) (1) の結果より、 D は媒介変数 t により $x = \frac{t(4-t)}{4}$, $y = \frac{(4-t)^2}{8}$ と表される。ここで $u = 4 - t$ とおくと $x = u - \frac{u^2}{4}$, $y = \frac{u^2}{8}$ であるから $u = \sqrt{8y}$ を用いて消去すると $x = \sqrt{8y} - 2y$ となる。よって $x + 2y = \sqrt{8y} = 2\sqrt{2y}$ だから、両辺を 2 乗して $x^2 + 4xy + 4y^2 = 8y$ すなわち $x^2 + 4xy + 4y^2 - 8y = 0$ を得る。これが D の方程式である。

この曲線の接線の傾きを調べるために、 t を媒介変数とみると $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{t}{2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{t-4}{4}$ なので $\frac{dy}{dx} = \frac{t-4}{4-2t}$ 。第 2 象限にある接点に対応する部分では $t > 4$ であり、したがって接線の傾きは $-\frac{1}{2} < k < 0$ である。

(4) D と y 軸で囲まれる部分の面積は、 y を 0 から 2 まで動かして

$$\int x dy$$

で求めることができる。ここで $x = \sqrt{8y} - 2y$ より、 $u = \sqrt{8y}$ とおけば $y = \frac{u^2}{8}$, $dy = \frac{u}{4} du$ だから

$$\int_0^2 x dy = \int_0^4 \left(u - \frac{u^2}{4}\right) \frac{u}{4} du = \int_0^4 \left(\frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{16}\right) du.$$

これを計算すると $\left[\frac{u^3}{12} - \frac{u^4}{64}\right]_0^4 = \frac{4}{3}$ 。したがって面積は $\frac{4}{3}$ である。

(5) (3) で得た曲線の方程式 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 8y = 0$ が求める関係式である。