

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2020 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

e を自然対数の底とする。 n を自然数とし、関数 $f(x) = e^{-x^n}$ を考える。(1)

$$\int_0^1 f(x) dx < 1$$

を示せ。(2) 実数 $r > 1$ に対して、

$$\int_1^r x^{n-1} f(x) dx < \frac{1}{en}$$

が成り立つことを示せ。(3) 実数 $r > 1$ に対して、

$$\int_0^r f(x) dx < 1 + \frac{1}{en}$$

が成り立つことを示せ。

第 2 問

n を自然数とする。座標平面上で、 x, y についての連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x, \\ 0 \leq y, \\ 2x + 3y \leq n \end{cases}$$

の表す領域を D とし、 D に属する格子点の個数を a_n とする。ただし、格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点をいう。

(1) D に属する格子点のうち、 y 座標が 0 または 1 である点は全部で n 個あることを示せ。

(2) 7 以上の自然数 n に対して

$$a_n = a_{n-6} + n$$

が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して

$$\left| a_n - \frac{(n+3)^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(4) $a_n \geq 100$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

第 3 問

座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が, 時刻 t ($0 \leq t \leq 2\pi$) の関数として

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t, \\ y = 2 \sin t + \sin 2t \end{cases}$$

で与えられているとする。 P の軌跡を C とする。(1) P の y 座標の最大値と, x 座標の最小値を求めよ。(2) $0 \leq t \leq \pi$ を満たすすべての時刻 t において, P は y 軸上の点を通る。その y 座標を求めよ。(3) 時刻 t における P の速さを求めよ。(4) C の長さを求めよ。(5) C によって囲まれた図形の面積を求めよ。

第 4 問

O を原点とする座標空間において、 z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱を考える。 yz 平面上の直線 $z = \sqrt{3}y$ と x 軸を含む平面で、この円柱を切ったときにできる切り口の楕円を C とする。 C 上の点で z 座標が最小の点を A とする。(1) A の座標を求めよ。(2) C 上の点 B で x 座標が正であり、 $\angle AOB = \pi/6$ を満たすものを求め、 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)