

上智大学 2020 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

e を自然対数の底とする。 n を自然数とし、関数 $f(x) = e^{-x^n}$ を考える。(1)

$$\int_0^1 f(x) dx < 1$$

を示せ。(2) 実数 $r > 1$ に対して、

$$\int_1^r x^{n-1} f(x) dx < \frac{1}{en}$$

が成り立つことを示せ。(3) 実数 $r > 1$ に対して、

$$\int_0^r f(x) dx < 1 + \frac{1}{en}$$

が成り立つことを示せ。

【方針】

(1) $0 \leq x \leq 1$ で $0 < x^n \leq 1$ を用いて $e^{-x^n} < 1$ を示す。(2) 置換 $t = x^n$ により積分を e^{-t} の形へ直し、 $t \geq 1$ での上界を用いる。(3)

$$\int_0^r f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^r f(x) dx$$

と分け、(1)(2) を組み合わせる。 $x \geq 1$ では $x^{n-1} \geq 1$ なので $f(x) \leq x^{n-1} f(x)$ が使えることに注意する。

【解答】

(1) $0 \leq x \leq 1$ では $0 \leq x^n \leq 1$ だから、 $e^{-x^n} < 1$ である。したがって

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x^n} dx < \int_0^1 1 dx = 1.$$

(2) $t = x^n$ とおくと $dt = nx^{n-1} dx$ であるから

$$\int_1^r x^{n-1} f(x) dx = \int_1^r x^{n-1} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_1^{r^n} e^{-t} dt.$$

よって

$$\int_1^r x^{n-1} f(x) dx < \frac{1}{n} \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{en}.$$

したがって

$$\int_1^r x^{n-1} f(x) dx < \frac{1}{en}$$

が成り立つ。

(3) $r > 1$ とする。

$$\int_0^r f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^r f(x) dx.$$

(1) より最初の積分は 1 未満である。また $x \geq 1$ では $x^{n-1} \geq 1$ だから $f(x) = e^{-x^n} \leq x^{n-1} e^{-x^n} = x^{n-1} f(x)$ である。したがって (2) を用いて

$$\int_1^r f(x) dx \leq \int_1^r x^{n-1} f(x) dx < \frac{1}{en}.$$

ゆえに

$$\int_0^r f(x) dx < 1 + \frac{1}{en}.$$

以上で示された。

【総評】 第1問は置換積分と比較の順序が正しいかを検算した。特に(3)では、 $x \geq 1$ で $x^{n-1} \geq 1$ から $f(x) \leq x^{n-1}f(x)$ を使える点が重要で、ここを落とすと上界が崩れる。最後に(2)の評価をそのまま(3)へつなげ、端点 $r > 1$ の条件の下で不等式が閉じることを確認した。

【第2問】

n を自然数とする。座標平面上で、 x, y についての連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x, \\ 0 \leq y, \\ 2x + 3y \leq n \end{cases}$$

の表す領域を D とし、 D に属する格子点の個数を a_n とする。ただし、格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点をいう。

(1) D に属する格子点のうち、 y 座標が 0 または 1 である点は全部で n 個あることを示せ。

(2) 7 以上の自然数 n に対して

$$a_n = a_{n-6} + n$$

が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して

$$\left| a_n - \frac{(n+3)^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(4) $a_n \geq 100$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

【方針】

(1) $y = 0, 1$ の各場合について x の整数解を数える。(2) $y \geq 2$ の格子点を $(x, y) \mapsto (x, y-2)$ で D_{n-6} に対応させる。(3) $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{6}$ の場合を整理して、基準値を直接数える。(4) 近似式で候補を絞り、漸化式で前後を確認する。

【解答】

(1) $y = 0$ のとき、 $2x \leq n$ より $x = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ であるから、点の個数は $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ 個である。

$y = 1$ のとき、 $2x + 3 \leq n$ より $2x \leq n - 3$ であるから、点の個数は $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 1$ 個である。

よって合計は

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 2.$$

これを偶奇で確かめると常に n に等しい。実際、 $n = 2m$ のとき $(m+1) + (m-1) = 2m$ 、 $n = 2m+1$ のとき $(m+1) + m = 2m+1$ である。したがって個数は n 個である。

(2) D_n を a_n に対応する領域とする。(1) より、 D_n に属する格子点のうち $y = 0, 1$ のものは n 個である。残りは $y \geq 2$ であり、その各点 (x, y) に対し $(x, y-2)$ を対応させると $2x + 3y \leq n \iff 2x + 3(y-2) \leq n-6$ となる。よって D_{n-6} の格子点と 1 対 1 に対応する。したがって $a_n = a_{n-6} + n$ が成り立つ。

(3) まず $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 7$ である。いま $n = 6q + r$ ($1 \leq r \leq 6$) とすると、(2) より

$$a_n = a_r + \sum_{k=1}^q (6k + r)$$

であり、

$$\sum_{k=1}^q (6k + r) = 3q(q+1) + rq.$$

したがって $a_n = a_r + 3q(q+1) + rq$ 。これを $n = 6q + r$ に戻して整理すると $a_n - \frac{(n+3)^2}{12}$ は r によって $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}, 0, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ のいずれかになる。したがって $\left| a_n - \frac{(n+3)^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$ がすべての自然数 n で成り立つ。

(4) (3) より $a_n = \left\lfloor \frac{(n+3)^2}{12} \right\rfloor$ とみてよい。実際に

$$a_{31} = \left\lfloor \frac{34^2}{12} \right\rfloor = 96 < 100, \quad a_{32} = \left\lfloor \frac{35^2}{12} \right\rfloor = 102 \geq 100$$

である。よって $a_n \geq 100$ を満たす最小の自然数は 32 である。

【総評】 第 2 問は格子点の数え上げと 6 刻みの漸化式の整合を検算した。(1) は床関数の偶奇確認、(2) は $(x, y) \mapsto (x, y-2)$ の 1 対 1 対応が本体で、範囲外の点を混ぜないことが重要である。(3) は $n \bmod 6$ ごとの定数差を直接確かめ、(4) では近似式だけで決めず a_{31}, a_{32} を実際に比較して最小性を確認した。

【第 3 問】

座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が、時刻 t ($0 \leq t \leq 2\pi$) の関数として

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t, \\ y = 2 \sin t + \sin 2t \end{cases}$$

で与えられているとする。 P の軌跡を C とする。(1) P の y 座標の最大値と、 x 座標の最小値を求めよ。(2) $0 \leq t \leq \pi$ を満たすすべての時刻 t において、 P は y 軸上の点を通る。その y 座標を求めよ。(3) 時刻 t における P の速さを求めよ。(4) C の長さを求めよ。(5) C によって囲まれた図形の面積を求めよ。

【方針】

(1) x, y を半角に直し、 $u = t/2$ で整理する。(2) $x = 0$ から $\cos t$ を求め、 y を計算する。(3) $x'(t), y'(t)$ を求め、平方和を整理する。(4) 速さを積分し、 $\cos(t/2)$ の符号変化に注意する。(5) 面積は

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt$$

を用いる。

【解答】

(1) $y = 2 \sin t + \sin 2t$ を微分すると $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t + 2 \cos 2t$. $c = \cos t$ とおけば、極値条件は $2c + 2(2c^2 - 1) = 0 \iff (2c - 1)(c + 1) = 0$. $c = 1/2$ のとき $y = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ となり、端点と $c = -1$ ではこれを上回らない。したがって $y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

また $x = 2 \cos^2 t + 2 \cos t - 1 = 2(\cos t + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$ より $x_{\min} = -\frac{3}{2}$ である。

(2) y 軸上にあるので $x = 0$ とすると $2 \cos t + \cos 2t = 0$. $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$ として $c = \cos t$ とおけば $2c + 2c^2 - 1 = 0$. よって $c = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ であるが、 $[-1, 1]$ に入るのは $c = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ である。このとき $\sin^2 t = 1 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、

$0 \leq t \leq \pi$ なので $\sin t = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$. したがって

$$y = 2 \sin t (1 + \cos t) = 2 \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

よって、 y 軸上の点の座標は $\left(0, \frac{\sqrt[4]{3}(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)$ である。

(3) $x' = -2 \sin t - 2 \sin 2t = -2 \sin t(1 + 2 \cos t)$, $y' = 2 \cos t + 2 \cos 2t = 2 \cos t + 4 \cos^2 t - 2$. $u = \frac{t}{2}$, $c = \cos u$, $s = \sin u$ とおくと $x = 8c^4 - 4c^2 - 1$, $y = 8sc^3$. これを微分して整理すると $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 16c^2$ となる。したがって速さ v は $v = 4 \left| \cos \frac{t}{2} \right|$ である。

(4) 弧長 L は

$$L = \int_0^{2\pi} 4 \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt.$$

$u = \frac{t}{2}$ とおくと $dt = 2du$ だから

$$L = 8 \int_0^{\pi} |\cos u| du = 8 \left(\int_0^{\pi/2} \cos u du + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos u) du \right).$$

よって $L = 8(1+1) = 16$.

(5) 面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt$$

で与えられる。計算すると $xy' - yx' = 6(1 + \cos t)$ となるから

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6(1 + \cos t) dt = 3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = 6\pi.$$

したがって求める面積は 6π である。

【総評】 第3問は半角公式による変形と、速度・弧長・面積の三つの独立検算が要点である。(1) は $y = 8 \sin \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}$ に直して極値条件を確認し、(3) は平方和が $16 \cos^2 \frac{t}{2}$ に落ちることを別経路で照合した。(5) では面積公式をそのまま適用し、周期全体で余弦項が消えて 6π になることを確かめた。

【第4問】

O を原点とする座標空間において、 z 軸を中心軸とする半径1の円柱を考える。 yz 平面上の直線 $z = \sqrt{3}y$ と x 軸を含む平面で、この円柱を切ったときにできる切り口の楕円を C とする。 C 上の点で z 座標が最小の点を A とする。(1) A の座標を求めよ。(2) C 上の点 B で x 座標が正であり、 $\angle AOB = \pi/6$ を満たすものを求め、 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

【方針】

(1) 円柱は $x^2 + y^2 = 1$ で表され、切断平面は $z = \sqrt{3}y$ である。したがって z の最小化は y の最小化に一致する。(2) $B = (x, y, \sqrt{3}y)$ とおき、 $x^2 + y^2 = 1$ と角条件を内積で表す。最後に三角形の面積は $\frac{1}{2}|OA||OB|\sin(\pi/6)$ で求める。

【解答】

(1) 切り口の平面は $z = \sqrt{3}y$ である。円柱は $x^2 + y^2 = 1$ で表されるから、 C 上では z は y に比例する。したがって z を最小にするには y を最小にすればよい。円柱上で y の最小値は -1 であり、そのとき $x = 0$ 、また $z = \sqrt{3}(-1) = -\sqrt{3}$ である。よって $A = (0, -1, -\sqrt{3})$ である。

(2) $B = (x, y, \sqrt{3}y)$ とおくと、 B は円柱上の点なので $x^2 + y^2 = 1$ である。また、 $\angle AOB = \pi/6$ より $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |OA||OB|\cos \frac{\pi}{6}$ が成り立つ。ここで

$$\vec{OA} = (0, -1, -\sqrt{3}), \quad \vec{OB} = (x, y, \sqrt{3}y)$$

だから $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -y - 3y = -4y$ 。また $|OA| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 、 $|OB| = \sqrt{x^2 + y^2 + 3y^2} = \sqrt{1 + 3y^2}$ 。したがって $-4y = 2\sqrt{1 + 3y^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sqrt{1 + 3y^2}$ 。両辺を二乗すると $16y^2 = 3(1 + 3y^2)$ より $7y^2 = 3$ 、 $y = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ 。ここで $x > 0$ かつ $\angle AOB = \pi/6$ は鋭角なので、内積は正である。ゆえに $y < 0$ でなければならないから $y = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ である。すると $x^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ より、 $x > 0$ から $x = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ である。さらに $z = \sqrt{3}y = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$ 。したがって

$$B \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, -\sqrt{\frac{3}{7}}, -\frac{3\sqrt{7}}{7} \right) = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{21}}{7}, -\frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

である。

最後に三角形 OAB の面積を求める。

$$|OA| = 2, \quad |OB| = \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{16}{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

また $\angle AOB = \pi/6$ より $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ であるから

$$[\triangle OAB] = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

よって、求める面積は $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ である。

【総評】 第 4 問は切断平面の式から円柱上の点を座標化し、角条件を内積で解く流れを検算した。(1) は $z = \sqrt{3}y$ なので z 最小が y 最小に一致する点を取り、 $A = (0, -1, -\sqrt{3})$ になることを確認した。(2) は $x^2 + y^2 = 1$ と $\angle AOB = \pi/6$ を連立し、符号は内積の正負で決めた。最後に面積を $|OA|, |OB|, \sin(\pi/6)$ から独立に再計算し、 $2\sqrt{7}/7$ と一致することを確かめた。