

上智大学 2020 年度 TEAP1 数学 (AM)

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 自然数 n と x の式 $A(x)$ に対する条件

$$(p_n) \quad \text{すべての } x \geq 1 \text{ に対して } A(x) \leq n$$

を考える。候補

$$\begin{aligned} (a) \quad & A(x) = 2x, & (b) \quad & A(x) = -2 + 5x - x^2, \\ (c) \quad & A(x) = \sin x, & (d) \quad & A(x) = 3 - \frac{1}{x}, \\ (e) \quad & A(x) = \log_{10} x \end{aligned}$$

から, (i) p_3 を満たすもの, (ii) すべての自然数 n で p_n を満たすもの, (iii) ある自然数 n で p_n を満たすものを選び。また (iv) p_n の否定を, 次から選べ。

(a) すべての $x < 1$ で $A(x) \leq n_0$ 。 (b) すべての $x \geq 1$ で $A(x) > n_0$ 。 (c) すべての $x < 1$ で $A(x) > n_0$ 。 (d) ある $x < 1$ で $A(x) \leq n_0$ 。 (e) ある $x \geq 1$ で $A(x) > n_0$ 。 (f) ある $x < 1$ で $A(x) > n_0$ 。

(2) 11 個の自然数 $x_1, \dots, x_{11}$ からなるデータについて, 次の命題が必ず成り立つか, 成り立つ場合と成り立たない場合があるか, 決して成り立たないかを答えよ。

(i) 平均値は自然数, (ii) 中央値は自然数, (iii) 最初の 10 個の分散より 11 個の分散の方が大きい, (iv) 標準偏差を $s_1, 2x_1 + 1, \dots, 2x_{11} + 1$ の標準偏差を s_2 とすると $s_2 = 2s_1 + 1$, (v) 同様に分散を v_1, v_2 とすると $v_2 = 4v_1$ 。

(3) 4 つの散布図 A~D の相関係数を, $-0.9, 0, 1.0, 0.5$ からそれぞれ選べ。ただし A は強い負の相関, B は無相関, C は一直線上の正の相関, D は弱い正の相関を示す。

【方針】

(1) は $x \geq 1$ での各関数の上限を調べ, 量化記号の否定を作る。(2) は反例と奇数個データの中央値の性質, 平行移動・定数倍による分散の変化を使う。(3) は散布図の向きと直線への密着度を読む。

【解答】

(1) (i) $x \geq 1$ で $\sin x \leq 1$, $2 \leq 3 - 1/x < 3$ だから (c), (d)。(ii) すべての自然数 n で上界 n 以下なのは (c) のみ。(iii) ある自然数を上界にもつのは, 最大値 $17/4$ をもつ (b) も含めて (b), (c), (d)。(iv) 否定は「ある $x \geq 1$ で $A(x) > n$ 」なので (e)。

(2) (i) 平均は自然数になる場合とならない場合があるので「場合による」。(ii) 11 個の自然数の中央値は 6 番目の値だから必ず自然数。(iii) 11 番目の値により増減するので「場合による」。(iv) 標準偏差は定数倍の絶対値倍で, 平行移動では変わらないから $s_2 = 2s_1$ 。よって決して成り立たない。(v) 分散は定数倍の 2 乗倍なので $v_2 = 4v_1$ は必ず成り立つ。

(3) A は -0.9 , B は 0 , C は 1.0 , D は 0.5 である。

【第 2 問】

円周上に等間隔に並ぶ 5 点 A, B, C, D, E がある。各点でさいころを 1 回ずつ投げ、同じ目が割り当てられた 2 点をすべて線分で結ぶ。孤立点や、線分を結べない場合も図形に含め、回転で重なる図形は同一とする。

(1) 出た目が 3 種類である図形は何通りか。(2) 図形は全部で何通りか。

以下では、5 点以外で線分どうしが交わる交点を数える。

(3) 交点をただ 1 つもつ図形は何通りか。(4) 交点をちょうど 2 つもつ図形は何通りか。(5) 交点をもたない図形は何通りか。

【方針】

さいころの具体的な目ではなく、5 点の同値類への分割だけを考える。目の種類数と各類の大きさで $5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1$ などの場合分けし、回転同値を除いて数える。

【解答】

(1) 分割型は $3+1+1$ と $2+2+1$ 。前者は三角形の選び方が ${}_5C_3 = 10$ 通り、後者は孤立点を選んだ後の 2 組の分け方が $5 \cdot {}_4C_2/2 = 15$ 通り。合計 25 通りである。

(2) 目の種類数ごとの通り数は、5 種類が 1, 4 種類が 10, 3 種類が 25, 2 種類が 15, 1 種類が 1。合計 52 通りである。

(3)–(5) 各分割型で弦の交差を数える。3 種類のうち $3+2$ 型では回転を考慮して交点 1 個が 5 通り、交点なしが 10 通り。2 種類では $4+1$ 型から交点 1 個が 5 通り、 $3+2$ 型から交点 2 個が 5 通り、交点なしが 5 通り。5 種類・4 種類と一種類の図形は交点をもたない。したがって、交点 1 個は 10 通り、交点 2 個は 5 通り、交点なしは 36 通りである。

【第 3 問】

一辺の長さが 2 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA, OB の中点をそれぞれ M, N とする。線分 MN を $(1-t):t$ に内分する点を P 、線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし $0 < t < 1$ とする。

(1) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ。(2) AP^2, AQ^2 を t の式で表せ。(3) $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ を求めよ。(4) $\triangle APQ$ の面積 S を求めよ。(5) $f(t) = 4S^2$ とおく。 $f'(1/3), f'(1/2), f'(2/3)$ を求め、 S が極値をとる t の範囲を選べ。

【方針】

正四面体の頂点から出る辺のなす角は 60° 。 $\vec{AP}, \vec{AQ}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表し、内積を計算する。面積は 2 辺の長さと内積から求め、平方を微分して符号変化を挟み撃ちする。

【解答】

(1) なす角が 60° なので $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$ 。

(2) $\vec{AP} = (t-2)\vec{OA}/2 + (1-t)\vec{OB}/2$ より $AP^2 = t^2 - 3t + 3$ 。また $\vec{AQ} = -\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC}$ より $AQ^2 = 4t^2 - 4t + 4$ 。

(3) 内積を展開して $\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = t^2 - 3t + 3$ 。

(4) $4S^2 = AP^2 AQ^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2$ だから

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{3t^4 - 10t^3 + 13t^2 - 6t + 3}.$$

(5) $f'(t) = 12t^3 - 30t^2 + 26t - 6$ であり、 $f'(1/3) = -2/9$, $f'(1/2) = 1$, $f'(2/3) = 14/9$ 。したがって $1/3 < t < 1/2$ で負から正へ変わる点があり、そこで S は極小値をとる。