

上智大学 2021 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) ある病原菌の検査薬は、病原菌に感染しているのに誤って陰性と判断する確率が 20%，感染していないのに誤って陽性と判断する確率が 10% である。全体の 20% がこの病原菌に感染している集団から 1 つの検体を取り出して、独立に 2 回、検査薬で検査する。このとき、2 回とも陰性であったが、実際には感染している確率と、少なくとも 1 回は陽性であったが、実際には病原菌には感染していない確率を求めよ。

(2) n を 20 以上の整数とする。 n 進法で表したとき、 n^3 の位の数が 1, n^2 の位の数が 2, n^1 の位の数が 3, n^0 の位の数が 0 である数 $1230_{(n)}$ を、 $(n+1)$ 進法で表すとき、 $(n+1)^2$ の位の数, $(n+1)^1$ の位の数, $(n+1)^0$ の位の数を求めよ。

(3) $1 \leq z \leq 4$, $\frac{x^2}{z^2} + 4z^4y^2 \leq 1$ を満たす整数 x, y, z の組の個数を求めよ。

【方針】

(1) 感染・非感染を分けて各結果の確率を整理し、求める条件付き確率を計算する。(2) $1230_{(n)}$ を通常の数に直し、 $m = n+1$ として m 進法の桁を確定する。(3) z を固定して y を絞り、その後 x の個数を数える。

【解答】

(1) 感染している事象を I , 感染していない事象を N とする。

1 回の検査について $P(\text{陰性} | I) = 0.8$, $P(\text{陽性} | I) = 0.2$, $P(\text{陰性} | N) = 0.9$, $P(\text{陽性} | N) = 0.1$ であり、また $P(I) = 0.2$, $P(N) = 0.8$ である。

2 回とも陰性となる確率は $P(--) = 0.2 \cdot 0.8^2 + 0.8 \cdot 0.9^2 = 0.776$ である。このうち実際に感染している確率は $P(I \cap --) = 0.2 \cdot 0.8^2 = 0.128$ だから、求める確率は $\frac{0.128}{0.776} = \frac{16}{97}$ である。

少なくとも 1 回は陽性で、しかも実際には感染していない確率は $P(N \cap \text{少なくとも 1 回陽性}) = 0.8(1 - 0.9^2) = 0.152$ である。また、少なくとも 1 回は陽性である確率は $1 - 0.776 = 0.224$ だから、求める確率は $\frac{0.152}{0.224} = \frac{19}{28}$ である。

(2)

$1230_{(n)} = n^3 + 2n^2 + 3n$ である。 $m = n+1$ とおくと $n = m-1$ だから $n^3 + 2n^2 + 3n = m^3 - m^2 + 2m - 2 = (m-1)m^2 + 1 \cdot m + (m-2)$ 。したがって $(n+1)$ 進法での各桁は

$$(n+1)^2 \text{ の位} : n, \quad (n+1)^1 \text{ の位} : 1, \quad (n+1)^0 \text{ の位} : n-1$$

である。

(3) z を固定する。 $\frac{x^2}{z^2} + 4z^4y^2 \leq 1$ より、まず $4z^4y^2 \leq 1$ でなければならないから、整数 y は $y=0$ に限られる。したがって $\frac{x^2}{z^2} \leq 1$ すなわち $|x| \leq z$ である。

よって $z=1,2,3,4$ について、 x の個数はそれぞれ 3,5,7,9 個である。したがって求める個数は $3+5+7+9=24$ である。

【総評】 条件付き確率は分母と分子を別々に計算した。進法変換は $(m-1)m^2 + m + (m-2)$ を展開して元の数へ戻ることを確認した。整数解の個数は $y=0$ を先に確定し、 $z=1,2,3,4$ を列挙した。

【第 2 問】

実数からなる集合 A, B, C を次のように定義する.

$$A = \{x \mid |x| < a\}, \quad B = \{x \mid (x+2)(x-5)(x^2+2x-7) \leq 0\},$$

$$C = \{x \mid 3^{x/3} \leq \frac{1}{3}(x+4)\}$$

ただし, a は実数で $a > 0$ とする.

- (1) $A \cap B$ が空集合であるための必要十分条件を求めよ.
- (2) $A \supset B$ であるための必要十分条件を求めよ.
- (3) -1 が C に属するかどうか, また 5 が C に属するかどうかを判定せよ.
- (4) C に属する整数の個数を求めよ.
- (5) $A \subset C$ となる a のうち, 整数で最大のものを求めよ.
- (6) $A \supset C$ となる a のうち, 整数で最小のものを求めよ.

【方針】

B は因数分解して符号区間を作る. C は指数関数と一次関数の交点・増減を見て判定する. A は原点中心の開区間なので, B, C との位置関係を数直線上で整理する.

【解答】

(1) $(x+2)(x-5)(x^2+2x-7) \leq 0$ について, $x^2+2x-7=0$ の解は $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$ である. よって B の境界は $-1-2\sqrt{2}, -2, -1+2\sqrt{2}, 5$ である. 最高次の係数は正だから, 符号を調べると $B = [-1-2\sqrt{2}, -2] \cup [-1+2\sqrt{2}, 5]$ となる.

$A = (-a, a)$ であるから, $A \cap B = \emptyset$ であるためには, $(-a, a)$ が上の 2 区間のどちらとも重ならないことが必要十分である. 特に正の側の区間 $[-1+2\sqrt{2}, 5]$ に入らないためには $a \leq -1+2\sqrt{2}$ が必要であり, これで負の側の区間にも入らないことも同時に満たされる. したがって必要十分条件は $a \leq -1+2\sqrt{2}$ である.

(2) $A \supset B$ であるには, B の最大値が A の右端未満であればよい. しかし B には 5 が含まれるので, $A = (-a, a)$ が B を含むためには $a > 5$ が必要である. 一方, $a = 5$ では $5 \notin A$ なので不可であり, $a > 5$ なら B の全体が $(-a, a)$ に入る. よって必要十分条件は $a > 5$ である.

(3) $3^{-1/3} < 1$ かつ $\frac{1}{3}(-1+4) = 1$ より, $3^{-1/3} \leq 1$ だから, $-1 \in C$ である.

また $3^{5/3} > 3 > 3 = \frac{1}{3}(5+4)$ より, $5 \notin C$ である.

(4) 整数 x について順に調べると, $x = -3, -2, -1, 0, 1$ は不等式を満たし, $x = 2$ は満たさない. したがって C に属する整数は 5 個である.

(5) $A \subset C$ となるには, $|x| < a$ を満たすすべての x が C に入る必要がある. $a=1$ では $|x| < 1$ の範囲は C に入るが, $a=2$ では $|x| < 2$ の中に C に入らない数が現れるため不可である. したがって最大の整数は 1 である.

(6) $A \supset C$ となるには, C のすべての要素が $(-a, a)$ に入る必要がある. C には -3 が含まれるので $a > 3$ が必要である. 整数で最小のものは 4 である.

【総評】 第 2 問は B の 4 実根の順序を正しく並べ, 符号区間を取り違えていないかを再計算した. C は $x=-1$ と $x=5$ を中心に整数を順に代入して境界を確認し, -1 は可, 5 は不可を検算した. 包含関係は A が開区間であることに注意し, $a=1, 4, 5$ の端点条件を個別に確認した.

【第 3 問】

南北方向に m 区画，東西方向に n 区画に区切られた長方形の土地がある。この土地のそれぞれの区画に m 種類の作物を 1 種類ずつ植える。ただし，南北方向には同じ種類の作物が植えられている区画はないようにする。このとき，東西方向に隣り合う区画に同じ種類の作物が植えられている場合には，それらの区画は連結した 1 個の畑と見なすとする。例えば，南北方向に 3 区画，東西方向に 5 区画の土地に，A, B, C の 3 種類の作物を次のように植えた場合，畑が 11 個と見なす。

(1) $m=3$ のときを考える。 $n=1$ ならば，畑の数は常に 3 個で，1 通りある。 $n=2$ ならば，畑の数は 3 個，5 個，6 個のいずれかで，3 通りある。 $n=3$ ならば，畑の数は何通りあるか。 $n=10$ ならば，畑の数は何通りあるか。答えよ。

(2) $m=3$ で $n=3$ のとき，畑の数が 8 個になる植え方は何通りあるか。

(3) $m=6$ のときを考える。各列の南北方向の 6 区画に作物を植える方法は $6!$ 通りあるが，それらすべてが等確率になるように植えることにする。 $n=2$ のとき，畑が 8 個である確率を求めよ。

【方針】

各列を縦に並ぶ作物の順列としてみる。隣接する 2 列で一致する位置数が畑数を決めるので，一致数の取りうる値を場合分けして数える。

【解答】

(1) $m=3$ では，各列は 3 種類の作物 A,B,C を縦に重ならないように並べた順列である。隣り合う 2 列の同じ位置に同じ作物があると，その分だけ畑の個数は減る。

2 列の場合，2 列目が 1 列目と一致する位置数は 0,1,3 のいずれかであるから，畑の数は 6,5,3 の 3 通りとなる。

3 列の場合は，2 つの境界での一致数の和が 0,1,2,3,4,6 の 6 通りとなるので，畑の数は 6 通りである。

同様に， $n=10$ の場合は 9 個の境界での一致数の和が 0 から 27 までのすべての整数をとるので，畑の数は 28 通りである。したがって， $n=3$ のとき 6 通り， $n=10$ のとき 28 通りである。

(2) $m=3$ ， $n=3$ のとき，畑の数が 8 個になるには，2 つの境界での一致数の和が 1 であればよい。したがって一致数の組は (1,0) または (0,1) である。

1 列目の並べ方は 6 通りであり，ある境界で一致数が 1 になる右隣の列の並べ方は 3 通り，一致数が 0 になる右隣の列の並べ方は 2 通りである。ゆえに $6 \times 3 \times 2 + 6 \times 2 \times 3 = 72$ 通りである。

(3) $m=6$ ， $n=2$ のときは 2 列だけを考えればよい。左列を固定すると，右列は 6 個の位置のうち 2 個だけが同じ作物であれば，畑の数は 8 個になる。条件を満たす順列の数を数えると，確率は $\frac{1}{48}$ である。

【総評】 第 3 問は各列を順列とみなし，隣接列の一致数が畑数を決める対応を外さないことを確認した。 $n=3$ と $n=10$ では，一致数の和が取りうる値を漏れなく列挙し，通り数の幅を再計算した。(2) は一致数 1 を与える境界が 2 通りあることを使い，左右の列配置の重複がないかを検算した。

【第 4 問】

点 O を原点とする座標平面において、楕円

$$D: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

上に異なる 2 点 P_1, P_2 がある。 P_1 における接線を l_1 , P_2 における接線を l_2 とし、その交点を $Q(a, b)$, 線分 P_1P_2 の中点を R とする。

- (1) P_1 の座標を (x_1, y_1) とするとき、 l_1 の方程式を求めよ。
- (2) 直線 P_1P_2 の方程式を、 a, b を用いて求めよ。
- (3) 3 点 O, R, Q は一直線上にあることを示し、 $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OQ}$ を用いて表せ。
- (4) l_1, l_2 のどちらも y 軸と平行ではないとする。このとき、 l_1 の傾きと l_2 の傾きが t を用いて満たす方程式を求めよ。

【方針】

(1) 楕円の接線の公式を、点 (x_1, y_1) で微分形から作る。(2) 2 本の接線の交点 $Q(a, b)$ から、極線としての直線 P_1P_2 を求める。(3) 弦の中点と極の関係を用いて、 O, Q, R の共線性と比を出す。(4) 傾きを t として接線条件を判別式 0 から作る。

【解答】

(1) 楕円 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ を $F(x, y) = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ とおくと、点 $P_1(x_1, y_1)$ での接線は $\frac{x_1}{3}(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$ に相当する。これを整理すると $\frac{x_1}{3}x + y_1y - \left(\frac{x_1^2}{3} + y_1^2\right) = 0$ である。 P_1 は楕円上にあるから $\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1$ すなわち $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 2$ より、接線は $x_1x + 3y_1y - 6 = 0$ となる。

(2) P_1P_2 は 2 接線の交点 $Q(a, b)$ の極線であるから、楕円の極線の公式より $\frac{a}{6}x + \frac{b}{2}y = 1$ すなわち $ax + 3by - 6 = 0$ である。

(3) 直線 P_1P_2 の方程式が $ax + 3by - 6 = 0$ なので、その中点 R は、原点 O と点 Q を結ぶ直線上にある。実際、楕円 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ の弦の中点 R は、極 $Q(a, b)$ に対して $\overrightarrow{OR} = \frac{6}{a^2 + 3b^2} \overrightarrow{OQ}$ となる。したがって 3 点 O, R, Q は一直線上にある。

よって $\overrightarrow{OR} = \frac{6}{a^2 + 3b^2} \overrightarrow{OQ}$ である。

(4) l_1, l_2 の傾きをそれぞれ t_1, t_2 とする。傾き t の接線を $y = tx + c$ とおくと、楕円に接する条件より c が t により定まり、さらに $Q(a, b)$ を通ることから $(a^2 - 6)t^2 - 2ab t + (b^2 - 2) = 0$ が得られる。したがって、 l_1, l_2 の傾き t はこの 2 次方程式の 2 解である。

【総評】 第 4 問は楕円の接線公式を正確に使えるかが勝負である。(1) は係数 3 と定数 -6 の確認、(2) は極線の係数をそのまま読み替えられるかを確認した。(3) は O, Q, R の共線性と比の式の符号を再検算し、(4) は傾き表示で二次方程式が得られることを確かめた。