

上智大学 2021 年度 TEAP1 数学 (AM)

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) 正の実数 s と実数 x, y の連立方程式

$$4^x + 9^y = 5, \quad 2^x 3^y = s$$

を考える。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ とする。(a) 解が 2 組あるための s の必要十分条件を求めよ。(b) $s = 2$ のとき, $x < y$ となる解 (x_0, y_0) をとる。 y_0 を小数第 3 位で四捨五入したときの整数部分, 小数第 1 位, 小数第 2 位を答えよ。(2) 正四面体 $OABC$ の辺 OA を $1:2$ に内分する点を P , 辺 OB を $3:2$ に内分する点を Q , $\triangle ABC$ の重心を G とする。平面 PQG と辺 AC の交点を R とするとき, $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ で表せ。

【方針】

(1) $X = 2^x, Y = 3^y$ と置くと $X^2 + Y^2 = 5, XY = s$ 。和と積から 2 次方程式を作り, 異なる正の 2 根の条件を判別式で求める。(2) R を P, Q, G のアフィン結合と辺 AC 上の表現の両方で置き, 係数比較する。

【解答】

(1)(a) $X + Y = \sqrt{2s+5}$ で, X, Y は $t^2 - \sqrt{2s+5}t + s = 0$ の根である。異なる 2 つの正の根をもつ条件は判別式 $5 - 2s > 0$ と $s > 0$ 。よって $0 < s < 5/2$ 。(b) $s = 2$ では $\{X, Y\} = \{1, 2\}$ 。 $x < y$ となるのは $(X, Y) = (1, 2)$ だから $x_0 = 0, y_0 = \log_3 2 = 0.301/0.477 = 0.631\dots$ 。小数第 3 位で四捨五入すると 0.63 であり, 答えは 0, 6, 3。(2) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}/3, \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OB}/5, \overrightarrow{OG} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/3$ 。平面上かつ辺 AC 上という係数条件を解くと

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OC}.$$

【第 2 問】

放物線 $C: y = x^2$ と, 互いに直交する C の 2 本の接線 ℓ, m を考える。(1) ℓ が点 $(2, 4)$ を通るとき, m の方程式と, ℓ, m の交点を求めよ。(2) ℓ, m の交点が y 軸上にあるとき, 2 直線と C で囲まれる図形の面積を求めよ。

【方針】

接点を (t, t^2) とすると接線は $y = 2tx - t^2$ 。直交する接線の傾きから相手の接点を決め, 交点を計算する。(2) は左右対称性を使って片側を積分する。

【解答】

(1) 点 $(2, 4)$ を通すと $4 = 4t - t^2$ より $t = 2$, したがって $\ell: y = 4x - 4$ 。直交する接線の傾きは $-1/4$ なので接点の媒介変数は $-1/8$,

$$m: y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{64}.$$

2 直線の交点は $(15/16, -1/4)$ である。(2) 交点が y 軸上となるのは接点の媒介変数が $t = \pm 1/2$ のときで, 接線は $y = x - 1/4, y = -x - 1/4$ 。対称性より面積は

$$2 \int_0^{1/2} \left\{ x^2 - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right\} dx = \frac{1}{12}.$$

【第 3 問】

硬貨を 2 枚投げる試行を 3 回繰り返し、1 回目、2 回目、3 回目に出た表の枚数を α, β, γ とする。3 次関数

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

を考える。

(1) $y = f(x)$ が極値をとらない確率を求めよ。(2) $y = f(x)$ が極大値をとるとき、極大値として取り得る値の最小値と最大値を求めよ。(3) 極大値が最小値となる確率を求めよ。(4) 極大値が最大値となる確率を求めよ。

【方針】

α, β, γ は独立に 0, 1, 2 を確率 $1/4, 1/2, 1/4$ でとる。導関数が実数解をもたない条件を判別式で整理する。残りは根の多重集合を分類し、代表的な 4 種類の極大値を比較する。

【解答】

- (1) f' の判別式が 0 以下となるのは $\alpha = \beta = \gamma$ の場合だけである。したがって確率は $(1/4)^3 + (1/2)^3 + (1/4)^3 = 5/32$ 。
 (2) 取り得る極大値を根の型ごとに調べると、 $x^2(x-1), x^2(x-2), (x-1)^2(x-2)$ では極大値 0, $x(x-1)^2$ では $4/27$, $x(x-2)^2$ では $32/27$, $x(x-1)(x-2)$ では $2\sqrt{3}/9$ 。したがって最小値は 0, 最大値は $32/27$ 。
 (3) 極大値 0 となる根の多重集合を確率つきで数えると $3/32 + 3/64 + 3/16 = 21/64$ 。
 (4) 最大値 $32/27$ となるのは根が 0, 2, 2 の並べ替えのときで、確率は $3(1/4)^3 = 3/64$ である。

【第 4 問】

(1) 関数 $f(x)$ に対する条件

$$(P) \quad f(n) > 3 \text{ を満たす } 5 \text{ 以上の自然数 } n \text{ が存在する}$$

の否定として正しいものを、次からすべて選べ。

- (a) $f(n) \leq 3$ を満たす 5 以上の自然数 n が存在する。(b) $f(n) > 3$ を満たす 5 未満の自然数 n が存在する。(c) $f(n) \leq 3$ を満たす 5 未満の自然数 n が存在する。(d) $n \geq 5$ ならば $f(n) \leq 3$ 。(e) $n < 5$ ならば $f(n) \leq 3$ 。(f) $n < 5$ ならば $f(n) > 3$ 。(g) $f(n) > 3$ がすべての $n \geq 5$ で成り立つ。(h) $f(n) \leq 3$ がすべての $n \geq 5$ で成り立つ。(i) $f(n) \leq 3$ がすべての $n < 5$ で成り立つ。

(2) 野菜 A は 1 個あたり栄養素 $(x_1, x_2, x_3) = (8, 4, 2)$ g, 野菜 B は $(4, 6, 6)$ g を含む。A を a 個, B を b 個選び、栄養素をそれぞれ 42 g 以上, 48 g 以上, 30 g 以上含むようにする。 $a + b$ を最小にする自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

【方針】

(1) 存在命題を否定して全称命題に直す。(2) 3 本の一次不等式を作り、まず和の下界を出す。最小の和について整数の組を代入して確認する。

【解答】

- (1) 否定は「5 以上のすべての自然数 n で $f(n) \leq 3$ 」である。したがって (d), (h)。
 (2) 条件は $8a + 4b \geq 42$, $4a + 6b \geq 48$, $2a + 6b \geq 30$ 。第 2 式から $48 \leq 4a + 6b \leq 6(a + b)$ なので $a + b \geq 8$ だが、和 8 では第 1 式を同時に満たせない。和 9 の組を調べると $(a, b) = (2, 7), (3, 6)$ がすべての条件を満たす。よって求める組はこの 2 組である。