

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2022 年 度 経 済 学 部 共 通 数 学

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) 整式 $P(x)$ を $x^2 + x - 2$ で割った余りが $2x + 1$, $x^2 - 4x + 3$ で割った余りが $-x + a$ である。 a と, $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割った余りを求めよ。

(2)

$$A = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right)^{-1}, \quad B = 5^{\log_5(2/5)}, \quad C = \log_3 1.5, \quad D = \log_2 \frac{4}{3}$$

を小さい順に並べよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.30$, $\log_{10} 3 = 0.47$, $\sqrt{3} = 1.73$ とする。

(3) 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は, すべての実数 x に対して

$$3 \int_0^x f(t) dt + 10 \int_{-1}^0 xf(t) dt = -2 \int_{-x}^0 f(t) dt + 12 \int_0^1 x^3 t f(t) dt$$

を満たし, さらに

$$\int_0^2 f(t) dt = -20$$

を満たす。 $f(x)$ を求めよ。

(4) 自然数 n を 2 進法で表した桁数と 10 進法で表した桁数の差を $F(n)$ とする。 $n \leq 1000$ のときの $F(n)$ の最大値と, その最大値をとる最小の n を求めよ。

第 2 問

座標空間に 3 点

$$A(0, 0, 2), \quad B(\sqrt{3}, 1, 0), \quad C(-2, 2\sqrt{3}, -2)$$

をとる。原点 O から 3 点 A, B, C の定める平面へ垂線 OH を下ろす。

- (1) $\angle BAC = \theta$ とするときの $\cos \theta$ と, $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) 点 H の座標と, 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。
- (3) H を中心とし O を通る球が yz 平面と交わってできる図形の面積を求めよ。

第 3 問

頂点が $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $D(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ である正方形の中心を $P_0 = O$ とする。各段階で現在の正方形を縦横に 4 等分し、番号 1, 2, 3, 4 を等確率で選んで右上, 左上, 左下, 右下の小正方形のいずれかを選び、その中心を順に $P_1, P_2, \dots$ とする。

- (1) n 個の線分 $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ の長さの和を求めよ。
- (2) カードを 3 回引いたとき, P_3 が $y \geq x$ かつ $y \leq 3x$ の範囲にある確率を求めよ。
- (3) カードを 3 回引いたとき, $P_0P_3 > 1$ となる確率を求めよ。
- (4) カードを 4 回引いたとき, P_4 の x 座標が $\sqrt{2}/3$ 以上 $3\sqrt{2}/4$ 以下となる確率を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)