

上智大学 2022 年度 経済学部共通数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 整式 $P(x)$ を $x^2 + x - 2$ で割った余りが $2x + 1$, $x^2 - 4x + 3$ で割った余りが $-x + a$ である。 a と, $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割った余りを求めよ。

(2)

$$A = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \right)^{-1}, \quad B = 5^{\log_5(2/5)}, \quad C = \log_3 1.5, \quad D = \log_2 \frac{4}{3}$$

を小さい順に並べよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.30$, $\log_{10} 3 = 0.47$, $\sqrt{3} = 1.73$ とする。

(3) 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は, すべての実数 x に対して

$$3 \int_0^x f(t) dt + 10 \int_{-1}^0 x f(t) dt = -2 \int_{-x}^0 f(t) dt + 12 \int_0^1 x^3 t f(t) dt$$

を満たし, さらに

$$\int_0^2 f(t) dt = -20$$

を満たす。 $f(x)$ を求めよ。

(4) 自然数 n を 2 進法で表した桁数と 10 進法で表した桁数の差を $F(n)$ とする。 $n \leq 1000$ のときの $F(n)$ の最大値と, その最大値をとる最小の n を求めよ。

【方針】

(1) は各 2 次式の根での値をつなぐ。(2) はすべて小数評価する。(3) は積分後の恒等式で係数比較し, 定積分条件を加える。(4) は 10 進の桁数ごとに 2 進の桁数が切り替わる境界を調べる。

【解答】

(1) $P(1) = 3$ である一方, 2 つ目の余りから $P(1) = -1 + a$ なので $a = 4$ 。 $P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割った余りを $bx + c$ とおくと, $P(-2) = -3$, $P(3) = 1$ より $b = 4/5$, $c = -7/5$ 。したがって余りは $4x/5 - 7/5$ である。

(2) $A = (3\sqrt{3} - 1)/13 \simeq 0.32$, $B = 2/5 = 0.40$, $C = 1 - 0.30/0.47 \simeq 0.36$, $D = 2 - 0.47/0.30 \simeq 0.43$ 。よって $A < C < B < D$ である。

(3) 与式を積分して係数比較すると $b = 0$, $2a + 9c = 0$ を得る。また条件 (b) から $8a/3 + 2c = -20$ である。これを解いて $a = -9$, $c = 2$ だから $f(x) = -9x^2 + 2$ である。

(4) 3 桁の範囲 $100 \leq n \leq 999$ では, $512 \leq n \leq 999$ のとき 2 進表示が 10 桁, 10 進表示が 3 桁なので差は 7 である。他の桁数の範囲も比較するとこれが最大であり, 最小の n は 512 である。

【第 2 問】

座標空間に 3 点

$$A(0, 0, 2), \quad B(\sqrt{3}, 1, 0), \quad C(-2, 2\sqrt{3}, -2)$$

をとる。原点 O から 3 点 A, B, C の定める平面へ垂線 OH を下ろす。

- (1) $\angle BAC = \theta$ とするときの $\cos \theta$ と、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) 点 H の座標と、四面体 $OABC$ の体積を求めよ。
- (3) H を中心とし O を通る球が yz 平面と交わってできる図形の面積を求めよ。

【方針】

(1) は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の内積。(2) は $H = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ と置き、 $\overrightarrow{OH}$ が両方向に垂直となる条件を解く。(3) は球の中心から yz 平面までの距離を半径から差し引く。

【解答】

(1) $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$ より $\cos \theta = 1/2$ 。したがって面積は $[\triangle ABC] = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \sin \theta / 2 = 4\sqrt{3}$ である。

(2) $H = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ とおく。 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ を解くと $s = 1/2$, $t = 1/6$ 。よって

$$H \left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

$|OH| = 2\sqrt{3}/3$ だから、四面体の体積は $4\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}/3) / 3 = 8/3$ である。

(3) 球の半径は $2\sqrt{3}/3$, 中心から yz 平面までの距離は $|-1/3 + \sqrt{3}/3|$ である。交円の半径の平方は

$$\frac{4}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)^2 = \frac{8+2\sqrt{3}}{9}.$$

よって面積は $(8+2\sqrt{3})\pi/9$ である。

【第 3 問】

頂点が $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), D(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ である正方形の中心を $P_0 = O$ とする。各段階で現在の正方形を縦横に 4 等分し、番号 1, 2, 3, 4 を等確率で選んで右上, 左上, 左下, 右下の小正方形のいずれかを選び、その中心を順に $P_1, P_2, \dots$ とする。

- (1) n 個の線分 $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ の長さの和を求めよ。
- (2) カードを 3 回引いたとき、 P_3 が $y \geq x$ かつ $y \leq 3x$ の範囲にある確率を求めよ。
- (3) カードを 3 回引いたとき、 $P_0P_3 > 1$ となる確率を求めよ。
- (4) カードを 4 回引いたとき、 P_4 の x 座標が $\sqrt{2}/3$ 以上 $3\sqrt{2}/4$ 以下となる確率を求めよ。

【方針】

移動距離は段階ごとに半分になるので等比級数を用いる。確率は各カード列を座標の 2 進的な符号列とみなし、対称性を利用して条件を満たす列を数える。

【解答】

(1) $P_{k-1}P_k = (1/2)^{k-1}$ だから

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

(2) 1 回目は 1, 2 回目は 1, 2, 3 のいずれかである必要がある。3 回目の許される枚数を場合分けすると、確率は $3/64 + 1/32 + 3/64 = 1/8$ である。

(3) 1 回目を 1 に固定したとき、残り 2 回で条件を満たす確率は $5/32$ である。4 方向の対称性より全体では $4 \cdot 5/32 = 5/8$ である。

(4) P_4 の x 座標は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon_2 + \frac{\sqrt{2}}{8}\varepsilon_3 + \frac{\sqrt{2}}{16}\varepsilon_4, \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}.$$

条件を満たす符号列は 3 通りで、 x 方向の各符号は確率 $1/2$ だから、確率は $3/16$ である。