

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2022 年 度 理 工 学 部 数 学

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) x, y を実数とする。次の条件について考える。

$p: xy$ が無理数である

$q: x, y$ がともに無理数である

$r: x, y$ の少なくとも一方が無理数である

(i) 以下から真の命題をすべて選べ。

(a) $p \Rightarrow q$

(b) $p \Rightarrow r$

(c) $q \Rightarrow p$

(d) $q \Rightarrow r$

(e) $r \Rightarrow p$

(f) $r \Rightarrow q$

(ii) x, y が命題 $p \Rightarrow q$ の反例であるための必要十分条件を、以下からすべて選べ。

(a) 「 xy が無理数」かつ「 x, y がともに有理数」である

(b) 「 xy が有理数」かつ「 x, y がともに有理数」である

(c) 「 xy が有理数」かつ「 x が有理数, または, y が有理数」である

(d) 「 xy が無理数」かつ「 x が有理数, または, y が有理数」である

(e) 「 xy が無理数, かつ, x が有理数」または「 xy が無理数, かつ, y が有理数」である

(f) 「 xy が有理数, かつ, x が有理数」または「 xy が有理数, かつ, y が有理数」である

(2) $(1 + x + x^2)^{10}$ の x^{16} の係数を求めよ。

(3)

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x \sin 2x \, dx$$

を求めよ。

第 2 問

t を実数とする。次の条件 (★) を満たす $\triangle ABC$ を考える。

(★) $AC = t$, $BC = 1$ を満たし, $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とおくと, $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(1) $\cos \angle BAC$ を求めよ。

(2) t の取りうる範囲を $t_1 < t < t_2$ とするとき, t_1, t_2 を求めよ。

(3) 辺 AB の長さを t の式で表せ。

(4) $\triangle ABC$ の面積は, $t = \frac{\sqrt{\text{シ}}}{\text{ス}}$ で最大値 $\frac{\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$ をとる。

(5) t_1, t_2 を (2) で定めた値とする。 $t_1 < t < t_2$ の範囲で, xyz -座標空間内の平面 $z = t$ 上に, 条件 (★) を満たす $\triangle ABC$ が, $B(0, 0, t), C(0, 1, t)$ を満たし, A の x 座標が正であるように置かれている。また, $B_1(0, 0, t_1), C_1(0, 1, t_1), B_2(0, 0, t_2), C_2(0, 1, t_2)$ とおく。

$\triangle ABC$ を $t_1 < t < t_2$ の範囲で動かしたときに通過して出来る図形に, 線分 B_1C_1 , 線分 B_2C_2 を付け加えた立体の体積を求めよ。

第 3 問

複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を次の条件で定める。

$$z_1 = 0, z_{n+1} = (1+i)z_n - i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

正の整数 n に対し, z_n に対応する複素数平面上の点を A_n とおく。

(1) $z_2 = +i, z_3 = +i, z_4 = +i$ である。

(2) $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて, $1+i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のように $1+i$ を極形式で表すとき, $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$ である。

(3) すべての正の整数 n に対する $\triangle PA_n A_{n+1}$ が互いに相似になる点 P に対応する複素数は, $+i$ である。

(4) $|z_n| > 1000$ となる最小の n は $n =$ である。

(5) A_{2022+k} が実軸上にある最小の正の整数 k は $k =$ である。

第 4 問

座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 4$ と点 $P(6, 0)$ がある。円 C 上を点 $A(2a, 2b)$ が動くとき、線分 AP の中点を M とし、線分 AP の垂直二等分線を ℓ とする。

- (1) 点 M の軌跡の方程式を求め、その軌跡を図示せよ。
- (2) 直線 ℓ の方程式を、 a, b を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ が通過する領域を表す不等式を求め、その領域を図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)