

上智大学 2022 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) x, y を実数とする。次の条件について考える。 $p: xy$ が無理数である $q: x, y$ がともに無理数である $r: x, y$ の少なくとも一方が無理数である

(i) 以下から真の命題をすべて選べ。

(a) $p \Rightarrow q$ (b) $p \Rightarrow r$ (c) $q \Rightarrow p$ (d) $q \Rightarrow r$ (e) $r \Rightarrow p$ (f) $r \Rightarrow q$ (ii) x, y が命題 $p \Rightarrow q$ の反例であるための必要十分条件を、以下からすべて選べ。(a) 「 xy が無理数」かつ「 x, y がともに有理数」である(b) 「 xy が有理数」かつ「 x, y がともに有理数」である(c) 「 xy が有理数」かつ「 x が有理数, または, y が有理数」である(d) 「 xy が無理数」かつ「 x が有理数, または, y が有理数」である(e) 「 xy が無理数, かつ, x が有理数」または「 xy が無理数, かつ, y が有理数」である(f) 「 xy が有理数, かつ, x が有理数」または「 xy が有理数, かつ, y が有理数」である(2) $(1 + x + x^2)^{10}$ の x^{16} の係数を求めよ。

(3)

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x \sin 2x \, dx$$

を求めよ。

【方針】

(1) 各命題は具体例で真偽を判定する。(ii) は「 p が真で q が偽」を日本語に直す。(2) は $1, x, x^2$ を何個選ぶかを立式して整数解を数える。(3) は部分積分で原始関数を作り、端点代入する。

【解答】

(1)

(i) まず各命題を調べる。

 $p \Rightarrow q$ は偽。たとえば $x = 2, y = \sqrt{2}/2$ とすると $xy = \sqrt{2}$ は無理数だが, x, y はともに無理数ではない。 $p \Rightarrow r$ は真。 xy が無理数なら, x, y がともに有理数であることはないので, 少なくとも一方は無理数である。 $q \Rightarrow p$ は偽。たとえば $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ では q は真だが, $xy = 2$ は有理数である。 $q \Rightarrow r$ は真。 x, y がともに無理数なら, 少なくとも一方が無理数であることは明らかである。 $r \Rightarrow p$ は偽。たとえば $x = \sqrt{2}, y = 0$ では r は真だが, $xy = 0$ は有理数である。 $r \Rightarrow q$ は偽。たとえば $x = \sqrt{2}, y = 1$ では r は真だが, q は偽である。

したがって真なのは (b), (d) である。

(ii) $p \Rightarrow q$ の反例は, p が真で q が偽であること, すなわち xy が無理数であり, かつ x, y がともに無理数ではないことである。後者は「 x が有理数または y が有理数」と同値なので, 必要十分条件は (e) である。

(2)

 $(1 + x + x^2)^{10}$ で x^{16} を作るには, 10 個の因子から $1, x, x^2$ をそれぞれ a, b, c 個選ぶとして

$a + b + c = 10$, $b + 2c = 16$ を満たせばよい。これを解くと

$(a, b, c) = (0, 4, 6), (1, 2, 7), (2, 0, 8)$ の 3 通りである。

各場合の係数はそれぞれ

$$\frac{10!}{0!4!6!} = 210, \frac{10!}{1!2!7!} = 360, \frac{10!}{2!0!8!} = 45$$

であるから、求める係数は

$$210 + 360 + 45 = 615$$

である。

(3)

部分積分を用いる。 $u = x$, $dv = \sin 2x \, dx$ とすると, $du = dx$, $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$ だから

$$\int x \sin 2x \, dx = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x \sin 2x \, dx &= \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

よって答えは $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ である。

【第 2 問】

t を実数とする。次の条件 (★) を満たす $\triangle ABC$ を考える。

(★) $AC = t$, $BC = 1$ を満たし, $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とおくと, $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(1) $\cos \angle BAC$ を求めよ。

(2) t の取りうる範囲を $t_1 < t < t_2$ とするとき, t_1, t_2 を求めよ。

(3) 辺 AB の長さを t の式で表せ。

(4) $\triangle ABC$ の面積は, $t = \frac{\sqrt{\text{シ}}}{\text{ス}}$ で最大値 $\frac{\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$ をとる。

(5) t_1, t_2 を (2) で定めた値とする。 $t_1 < t < t_2$ の範囲で, xyz -座標空間内の平面 $z = t$ 上に, 条件 (★) を満たす $\triangle ABC$ が, $B(0, 0, t), C(0, 1, t)$ を満たし, A の x 座標が正であるように置かれている。また, $B_1(0, 0, t_1), C_1(0, 1, t_1), B_2(0, 0, t_2), C_2(0, 1, t_2)$ とおく。

$\triangle ABC$ を $t_1 < t < t_2$ の範囲で動かしたときに通過して出来る図形に, 線分 B_1C_1 , 線分 B_2C_2 を付け加えた立体の体積を求めよ。

【方針】

(1) 角の二等分線より $\angle BAC = 2\angle DAC$ とおき, 倍角公式を使う。(2) 余弦定理で AB を未知数とする二次方程式を作り, 正の解が存在する条件を調べる。(3) 二次方程式の正の根を採用する。(4) 面積を t の関数にして微分し, 最大値を求める。(5) 各高さ $z = t$ での断面積を積分して体積を出す。

【解答】

(1)

$\alpha = \angle DAC$ とおくと, 角の二等分線より

$$\angle BAC = 2\alpha$$

である。 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ だから

$$\cos \angle BAC = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

となる。

(2)

$AB = x$ とおく。 $BC = 1, AC = t, \angle BAC = \theta$ とすると, (1) より $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ なので, 余弦定理から

$$1 = x^2 + t^2 - 2xt \cos \theta = x^2 + t^2 + \frac{2}{3}xt$$

すなわち

$$x^2 + \frac{2}{3}tx + t^2 - 1 = 0$$

を満たす正の実数 x が存在すればよい。判別式は

$$\Delta = \left(\frac{2}{3}t\right)^2 - 4(t^2 - 1) = \frac{4}{9}(9 - 8t^2)$$

であるから, まず $9 - 8t^2 \geq 0$, すなわち $t \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ が必要である。

解は

$$x = -\frac{t}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2}$$

である。正の解をもつためには

$$-\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2} > 0$$

すなわち

$$\sqrt{9 - 8t^2} > t$$

が必要である。 $t \geq 0$ として両辺を二乗すると

$$9 - 8t^2 > t^2$$

より

$$t^2 < 1$$

となる。したがって

$$0 < t < 1$$

である。ゆえに

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1 \text{ である。}$$

(3)

(2) の二次方程式の正の解をとれば

$$AB = -\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2}$$

である。したがって

$$AB = -\frac{1}{3}t + \sqrt{1 - \frac{8}{9}t^2}$$

と表せる。

(4)

(1) より $\cos \angle BAC = -\frac{1}{3}$ だから

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。よって面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot t \left(-\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2} \right) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

より

$$S = \frac{\sqrt{2}}{9} \left(-t^2 + t\sqrt{9 - 8t^2} \right)$$

である。

$$g(t) = -t^2 + t\sqrt{9-8t^2} \text{ とおくと}$$

$$g'(t) = -2t + \sqrt{9-8t^2} - \frac{8t^2}{\sqrt{9-8t^2}}$$

である。 $g'(t) = 0$ を整理すると

$$32t^4 - 36t^2 + 9 = 0$$

となる。 $u = t^2$ とおくと

$$32u^2 - 36u + 9 = 0$$

より

$$u = \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$$

を得るが, 元の条件を満たすのは $u = \frac{3}{8}$ である。したがって

$$t = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ で最大となる。}$$

このとき

$$g\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{9}{8}$$

だから

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

である。よって

$$t = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ をとる。}$$

(5)

高さ $z = t$ における断面は三角形 ABC そのものであるから, 体積 V は断面積 $S(t)$ の積分で与えられる。

$$S(t) = \frac{\sqrt{2}}{9} \left(-t^2 + t\sqrt{9-8t^2} \right) \text{ であるので}$$

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{9} \int_0^1 \left(-t^2 + t\sqrt{9-8t^2} \right) dt$$

となる。ここで

$$\int_0^1 t\sqrt{9-8t^2} dt = \frac{13}{12}$$

,

また

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

だから

$$V = \frac{\sqrt{2}}{9} \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

である。

【第 3 問】

複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を次の条件で定める。

$$z_1 = 0, z_{n+1} = (1+i)z_n - i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

正の整数 n に対し、 z_n に対応する複素数平面上の点を A_n とおく。

(1) $z_2 = +i, z_3 = +i, z_4 = +i$ である。

(2) $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて、 $1+i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のように $1+i$ を極形式で表すとき、 $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$ である。

(3) すべての正の整数 n に対する $\triangle PA_n A_{n+1}$ が互いに相似になる点 P に対応する複素数は、 $+i$ である。

(4) $|z_n| > 1000$ となる最小の n は $n = 1000$ である。

(5) A_{2022+k} が実軸上にある最小の正の整数 k は $k = 2022$ である。

【方針】

漸化式の不動点を求めて平行移動し、等比的な形に直す。(1) は直接代入する。(2) は絶対値と偏角を求める。(3) は不動点から相似中心を読む。(4) は一般式から絶対値を比較する。(5) は虚部が 0 となる条件を偏角で調べる。

【解答】

(1)

順に計算すると

$$z_2 = (1+i)z_1 - i = -i$$

より

$$z_2 = 0 - 1i$$

である。

次に

$$z_3 = (1+i)z_2 - i = (1+i)(-i) - i = 1 - 2i$$

だから

$$z_3 = 1 - 2i$$

である。

さらに

$$z_4 = (1+i)z_3 - i = (1+i)(1-2i) - i = 3 - 2i$$

より

$$z_4 = 3 - 2i$$

である。

(2)

$1+i$ の絶対値は

$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

であり、偏角は $\pi/4$ である。したがって

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

となる。よって

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{1}{4}\pi \text{ である。}$$

(3)

不動点 p を求めると

$$p = (1+i)p - i \text{ を満たすから}$$

$$-ip = -i \text{ より}$$

$$p = 1 \text{ である。}$$

そこで $w_n = z_n - 1$ とおくと

$$w_{n+1} = (1+i)w_n$$

となり, $w_1 = -1$ だから

$$w_n = -(1+i)^{n-1}$$

である。したがって

$$z_n = 1 - (1+i)^{n-1}$$

と表される。

このとき, 回転拡大の中心は 1 であるから, すべての $\triangle PA_n A_{n+1}$ が相似となる点 P は複素数 $1+0i$ に対応する。

(4)

一般式 $z_n = 1 - (1+i)^{n-1}$ を用いる。 $|1+i| = \sqrt{2}$ なので

$$|(1+i)^{n-1}| = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

である。実際に

$$z_{21} = 1 - (1+i)^{20} = 1 - (-1024) = 1025$$

だから

$$|z_{21}| = 1025 > 1000$$

である。一方, $n \leq 20$ では $|z_n| \leq 1000$ であるから, 最小の n は

21

である。

(5)

A_{2022+k} が実軸上にあることは, z_{2022+k} が実数であることと同値である。一般式より

$$z_n = 1 - 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{4} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{4} \right)$$

であるから, 虚部が 0 となるには

$$\sin \frac{(n-1)\pi}{4} = 0$$

すなわち

$$n \equiv 1 \pmod{4}$$

であればよい。 $2022 \equiv 2 \pmod{4}$ なので, $2022+k \equiv 1 \pmod{4}$ となる最小の正の整数は

$$k = 3$$

である。

【第 4 問】

座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 4$ と点 $P(6, 0)$ がある。円 C 上に点 $A(2a, 2b)$ が動くとき、線分 AP の中点を M とし、線分 AP の垂直二等分線を ℓ とする。

- (1) 点 M の軌跡の方程式を求め、その軌跡を図示せよ。
- (2) 直線 ℓ の方程式を、 a, b を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ が通過する領域を表す不等式を求め、その領域を図示せよ。

【方針】

(1) 中点の座標を求め、円の方程式に代入する。(2) 垂直二等分線は等距離条件で求める。(3) 直線群の通過領域は、ある実数の取りうる範囲として内積評価に帰着する。

【解答】

(1)

点 $A(2a, 2b)$ は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にあるから $(2a)^2 + (2b)^2 = 4$, すなわち $a^2 + b^2 = 1$ である。線分 AP の中点 M は $M\left(\frac{2a+6}{2}, \frac{2b}{2}\right) = (a+3, b)$ である。 $M = (x, y)$ とおけば $a = x-3$, $b = y$ なので $(x-3)^2 + y^2 = 1$ を得る。したがって、軌跡は中心 $(3, 0)$, 半径 1 の円である。

(2)

直線 ℓ 上の点を (x, y) とすると、 A と P から等距離であるから $(x-2a)^2 + (y-2b)^2 = (x-6)^2 + y^2$. $a^2 + b^2 = 1$ を用いて整理すると $ax + by = 3x - 8$ となる。これが直線 ℓ の方程式である。

(3)

点 (x, y) を通る直線 ℓ が存在するための条件は、 $a^2 + b^2 = 1$ を満たす実数 a, b によって $ax + by = 3x - 8$ と書けることである。内積の取りうる範囲より $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq ax + by \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ だから、必要十分条件は $|3x - 8| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. 両辺を二乗して $x^2 + y^2 \geq (3x - 8)^2$ を得る。したがって通過領域は $y^2 \geq 8(x - 3)^2 - 8$ で表され、境界を含む双曲線の左右の枝の間の領域である。