

上智大学 2022 年度 理工学部数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

(1) x, y を実数とする。次の条件について考える。 $p: xy$ が無理数である $q: x, y$ がともに無理数である $r: x, y$ の少なくとも一方が無理数である

(i) 以下から真の命題をすべて選べ。

(a) $p \Rightarrow q$ (b) $p \Rightarrow r$ (c) $q \Rightarrow p$ (d) $q \Rightarrow r$ (e) $r \Rightarrow p$ (f) $r \Rightarrow q$ (ii) x, y が命題 $p \Rightarrow q$ の反例であるための必要十分条件を、以下からすべて選べ。(a) 「 xy が無理数」かつ「 x, y がともに有理数」である(b) 「 xy が有理数」かつ「 x, y がともに有理数」である(c) 「 xy が有理数」かつ「 x が有理数, または, y が有理数」である(d) 「 xy が無理数」かつ「 x が有理数, または, y が有理数」である(e) 「 xy が無理数, かつ, x が有理数」または「 xy が無理数, かつ, y が有理数」である(f) 「 xy が有理数, かつ, x が有理数」または「 xy が有理数, かつ, y が有理数」である(2) $(1 + x + x^2)^{10}$ の x^{16} の係数を求めよ。

(3)

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x \sin 2x \, dx$$

を求めよ。

【方針】

(1) 各命題は具体例で真偽を判定する。(ii) は「 p が真で q が偽」を日本語に直す。(2) は $1, x, x^2$ を何個選ぶかを立式して整数解を数える。(3) は部分積分で原始関数を作り、端点代入する。

【解答】

(1)

(i) まず各命題を調べる。

 $p \Rightarrow q$ は偽。たとえば $x = 2, y = \sqrt{2}/2$ とすると $xy = \sqrt{2}$ は無理数だが, x, y はともに無理数ではない。 $p \Rightarrow r$ は真。 xy が無理数なら, x, y がともに有理数であることはないので, 少なくとも一方は無理数である。 $q \Rightarrow p$ は偽。たとえば $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ では q は真だが, $xy = 2$ は有理数である。 $q \Rightarrow r$ は真。 x, y がともに無理数なら, 少なくとも一方が無理数であることは明らかである。 $r \Rightarrow p$ は偽。たとえば $x = \sqrt{2}, y = 0$ では r は真だが, $xy = 0$ は有理数である。 $r \Rightarrow q$ は偽。たとえば $x = \sqrt{2}, y = 1$ では r は真だが, q は偽である。

したがって真なのは (b), (d) である。

(ii) $p \Rightarrow q$ の反例は, p が真で q が偽であること, すなわち xy が無理数であり, かつ x, y がともに無理数ではないことである。後者は「 x が有理数または y が有理数」と同値なので, 必要十分条件は (e) である。

(2)

 $(1 + x + x^2)^{10}$ で x^{16} を作るには, 10 個の因子から $1, x, x^2$ をそれぞれ a, b, c 個選ぶとして

$a + b + c = 10$, $b + 2c = 16$ を満たせばよい。これを解くと

$(a, b, c) = (0, 4, 6), (1, 2, 7), (2, 0, 8)$ の 3 通りである。

各場合の係数はそれぞれ

$$\frac{10!}{0!4!6!} = 210, \frac{10!}{1!2!7!} = 360, \frac{10!}{2!0!8!} = 45$$

であるから、求める係数は

$$210 + 360 + 45 = 615$$

である。

(3)

部分積分を用いる。 $u = x$, $dv = \sin 2x \, dx$ とすると, $du = dx$, $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$ だから

$$\int x \sin 2x \, dx = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x \sin 2x \, dx &= \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

よって答えは $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ である。

【総評】 (1) は命題の真偽と反例の定義を混同しやすいので、具体例で反証できるかを最後に確認した。(2) は指数条件 $b + 2c = 16$ と個数条件 $a + b + c = 10$ を同時に満たす整数解を漏れなく列挙した。(3) は部分積分の符号と端点 $\frac{4\pi}{3}$ の三角関数値を再検算し、数値近似でも整合することを確認めた。

【第 2 問】

t を実数とする。次の条件 (★) を満たす $\triangle ABC$ を考える。

(★) $AC = t$, $BC = 1$ を満たし, $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とおくと, $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(1) $\cos \angle BAC$ を求めよ。

(2) t の取りうる範囲を $t_1 < t < t_2$ とするとき, t_1, t_2 を求めよ。

(3) 辺 AB の長さを t の式で表せ。

(4) $\triangle ABC$ の面積は, $t = \frac{\sqrt{7}}{2}$ で最大値 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ をとる。

(5) t_1, t_2 を (2) で定めた値とする。 $t_1 < t < t_2$ の範囲で, xyz -座標空間内の平面 $z = t$ 上に, 条件 (★) を満たす $\triangle ABC$ が, $B(0, 0, t), C(0, 1, t)$ を満たし, A の x 座標が正であるように置かれている。また, $B_1(0, 0, t_1), C_1(0, 1, t_1), B_2(0, 0, t_2), C_2(0, 1, t_2)$ とおく。

$\triangle ABC$ を $t_1 < t < t_2$ の範囲で動かしたときに通過して出来る図形に, 線分 B_1C_1 , 線分 B_2C_2 を付け加えた立体の体積を求めよ。

【方針】

(1) 角の二等分線より $\angle BAC = 2\angle DAC$ とおき、倍角公式を使う。(2) 余弦定理で AB を未知数とする二次方程式を作り、正の解が存在する条件を調べる。(3) 二次方程式の正の根を採用する。(4) 面積を t の関数にして微分し、最大値を求める。(5) 各高さ $z = t$ での断面積を積分して体積を出す。

【解答】

(1)

$\alpha = \angle DAC$ とおくと、角の二等分線より

$$\angle BAC = 2\alpha$$

である。 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ だから

$$\cos \angle BAC = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

となる。

(2)

$AB = x$ とおく。 $BC = 1$, $AC = t$, $\angle BAC = \theta$ とすると、(1) より $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ なので、余弦定理から

$$1 = x^2 + t^2 - 2xt \cos \theta = x^2 + t^2 + \frac{2}{3}xt$$

すなわち

$$x^2 + \frac{2}{3}tx + t^2 - 1 = 0$$

を満たす正の実数 x が存在すればよい。判別式は

$$\Delta = \left(\frac{2}{3}t\right)^2 - 4(t^2 - 1) = \frac{4}{9}(9 - 8t^2)$$

であるから、まず $9 - 8t^2 \geq 0$ 、すなわち $t \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ が必要である。

解は

$$x = -\frac{t}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2}$$

である。正の解をもつためには

$$-\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2} > 0$$

すなわち

$$\sqrt{9 - 8t^2} > t$$

が必要である。 $t \geq 0$ として両辺を二乗すると

$$9 - 8t^2 > t^2$$

より

$$t^2 < 1$$

となる。したがって

$$0 < t < 1$$

である。ゆえに

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1 \text{ である。}$$

(3)

(2) の二次方程式の正の解をとれば

$$AB = -\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 - 8t^2}$$

である。したがって

$$AB = -\frac{1}{3}t + \sqrt{1 - \frac{8}{9}t^2}$$

と表せる。

(4)

(1) より $\cos \angle BAC = -\frac{1}{3}$ だから

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。よって面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot t \left(-\frac{t}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{9 - 8t^2} \right) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

より

$$S = \frac{\sqrt{2}}{9} \left(-t^2 + t\sqrt{9 - 8t^2} \right)$$

である。

$g(t) = -t^2 + t\sqrt{9 - 8t^2}$ とおくと

$$g'(t) = -2t + \sqrt{9 - 8t^2} - \frac{8t^2}{\sqrt{9 - 8t^2}}$$

である。 $g'(t) = 0$ を整理すると

$$32t^4 - 36t^2 + 9 = 0$$

となる。 $u = t^2$ とおくと

$$32u^2 - 36u + 9 = 0$$

より

$$u = \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$$

を得るが、元の条件を満たすのは $u = \frac{3}{8}$ である。したがって

$$t = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ で最大となる。}$$

このとき

$$g\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{9}{8}$$

だから

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

である。よって

$$t = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ をとる。}$$

(5)

高さ $z = t$ における断面は三角形 ABC そのものであるから、体積 V は断面積 $S(t)$ の積分で与えられる。

$$S(t) = \frac{\sqrt{2}}{9} \left(-t^2 + t\sqrt{9 - 8t^2} \right) \text{ であるので}$$

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{9} \int_0^1 \left(-t^2 + t\sqrt{9 - 8t^2} \right) dt$$

となる。ここで

$$\int_0^1 t\sqrt{9 - 8t^2} dt = \frac{13}{12}$$

,

また

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

だから

$$V = \frac{\sqrt{2}}{9} \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

である。

【総評】 (1) は二等分線のため $\angle BAC = 2\angle DAC$ とおけることを確認した。(2) は判別式だけでなく正の解の存在条件を別に調べる必要があり、そこで初めて $0 < t < 1$ が出る。(4) は $u = t^2$ による方程式の解のうち、元の条件に合う根だけを採用した。(5) は各高さでの断面積をそのまま積分する立体であることを再確認し、

$$\int_0^1 t\sqrt{9-8t^2} dt = 13/12$$

を独立に検算した。

【第 3 問】

複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を次の条件で定める。

$$z_1 = 0, z_{n+1} = (1+i)z_n - i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

正の整数 n に対し、 z_n に対応する複素数平面上の点を A_n とおく。

(1) $z_2 = +i, z_3 = +i, z_4 = +i$ である。

(2) $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて、 $1+i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のように $1+i$ を極形式で表すとき、 $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$ である。

(3) すべての正の整数 n に対する $\triangle PA_n A_{n+1}$ が互いに相似になる点 P に対応する複素数は、 $+i$ である。

(4) $|z_n| > 1000$ となる最小の n は $n = 1000$ である。

(5) A_{2022+k} が実軸上にある最小の正の整数 k は $k = 2022$ である。

【方針】

漸化式の不動点を求めて平行移動し、等比的な形に直す。(1) は直接代入する。(2) は絶対値と偏角を求める。(3) は不動点から相似中心を読む。(4) は一般式から絶対値を比較する。(5) は虚部が 0 となる条件を偏角で調べる。

【解答】

(1)

順に計算すると

$$z_2 = (1+i)z_1 - i = -i$$

より

$$z_2 = 0 - 1i$$

である。

次に

$$z_3 = (1+i)z_2 - i = (1+i)(-i) - i = 1 - 2i$$

だから

$$z_3 = 1 - 2i$$

である。

さらに

$$z_4 = (1+i)z_3 - i = (1+i)(1-2i) - i = 3 - 2i$$

より

$$z_4 = 3 - 2i$$

である。

(2)

$1+i$ の絶対値は

$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

であり、偏角は $\pi/4$ である。したがって

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

となる。よって

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{1}{4}\pi \text{ である。}$$

(3)

不動点 p を求めると

$$p = (1+i)p - i \text{ を満たすから}$$

$$-ip = -i \text{ より}$$

$$p = 1 \text{ である。}$$

そこで $w_n = z_n - 1$ とおくと

$$w_{n+1} = (1+i)w_n$$

となり, $w_1 = -1$ だから

$$w_n = -(1+i)^{n-1}$$

である。したがって

$$z_n = 1 - (1+i)^{n-1}$$

と表される。

このとき, 回転拡大の中心は 1 であるから, すべての $\triangle PA_n A_{n+1}$ が相似となる点 P は複素数 $1+0i$ に対応する。

(4)

一般式 $z_n = 1 - (1+i)^{n-1}$ を用いる。 $|1+i| = \sqrt{2}$ なので

$$|(1+i)^{n-1}| = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

である。実際に

$$z_{21} = 1 - (1+i)^{20} = 1 - (-1024) = 1025$$

だから

$$|z_{21}| = 1025 > 1000$$

である。一方, $n \leq 20$ では $|z_n| \leq 1000$ であるから, 最小の n は

21

である。

(5)

A_{2022+k} が実軸上にあることは, z_{2022+k} が実数であることと同値である。一般式より

$$z_n = 1 - 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{4} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{4} \right)$$

であるから, 虚部が 0 となるには

$$\sin \frac{(n-1)\pi}{4} = 0$$

すなわち

$$n \equiv 1 \pmod{4}$$

であればよい。 $2022 \equiv 2 \pmod{4}$ なので, $2022+k \equiv 1 \pmod{4}$ となる最小の正の整数は

$$k = 3$$

である。

【総評】 不動点を 1 と見抜いて $z_n = 1 - (1+i)^{n-1}$ に直すのが核心である。(4) は $z_{21} = 1 - (-1024) = 1025$ となることを再計算し, 最小値が 21 であることを確認した。(5) は実軸上という条件から虚部が 0 であることを確認し, $n \equiv 1 \pmod{4}$ を用いて最小の k を求めた。

【第 4 問】

座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 4$ と点 $P(6, 0)$ がある。円 C 上に点 $A(2a, 2b)$ が動くとき、線分 AP の中点を M とし、線分 AP の垂直二等分線を ℓ とする。

- (1) 点 M の軌跡の方程式を求め、その軌跡を図示せよ。
- (2) 直線 ℓ の方程式を、 a, b を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ が通過する領域を表す不等式を求め、その領域を図示せよ。

【方針】

(1) 中点の座標を求め、円の方程式に代入する。(2) 垂直二等分線は等距離条件で求める。(3) 直線群の通過領域は、ある実数の取りうる範囲として内積評価に帰着する。

【解答】

(1)

点 $A(2a, 2b)$ は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にあるから $(2a)^2 + (2b)^2 = 4$, すなわち $a^2 + b^2 = 1$ である。線分 AP の中点 M は $M\left(\frac{2a+6}{2}, \frac{2b}{2}\right) = (a+3, b)$ である。 $M = (x, y)$ とおけば $a = x-3$, $b = y$ なので $(x-3)^2 + y^2 = 1$ を得る。したがって、軌跡は中心 $(3, 0)$ 、半径 1 の円である。

(2)

直線 ℓ 上の点を (x, y) とすると、 A と P から等距離であるから $(x-2a)^2 + (y-2b)^2 = (x-6)^2 + y^2$. $a^2 + b^2 = 1$ を用いて整理すると $ax + by = 3x - 8$ となる。これが直線 ℓ の方程式である。

(3)

点 (x, y) を通る直線 ℓ が存在するための条件は、 $a^2 + b^2 = 1$ を満たす実数 a, b によって $ax + by = 3x - 8$ と書けることである。内積の取りうる範囲より $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq ax + by \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ だから、必要十分条件は $|3x - 8| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. 両辺を二乗して $x^2 + y^2 \geq (3x - 8)^2$ を得る。したがって通過領域は $y^2 \geq 8(x - 3)^2 - 8$ で表され、境界を含む双曲線の左右の枝の間の領域である。

【総評】 (1) は中点が $(a+3, b)$ になることをまず確認した。(2) は等距離条件から一直線に式変形でき、 $ax + by = 3x - 8$ まで誤差なく到達する。(3) は「ある (a, b) が存在する」条件なので、単位ベクトルとの内積の最大値を使うのが本質である。最後に不等式を平方して、 $|3x - 8| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ と $x^2 + y^2 \geq (3x - 8)^2$ が同値であることを再確認した。