

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2022 年 度 TEAP1 数 学 (AM)

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

1 個のさいころを 2 回投げ、1 回目の目を a 、2 回目の目を b とする。座標平面上の直線

$$\ell: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

と両座標軸で囲まれる三角形を D 、その面積を S とする。

- (1) S が整数、3 の整数倍、4 の整数倍となる確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 点 $(2, 4)$ 、点 $(2, 3)$ が D に含まれる確率をそれぞれ求めよ。
- (3) 円 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$ と ℓ が共有点をもたない確率を求めよ。

第 2 問

空間内に立方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P ，線分 CP の中点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ で表せ。

(2) 線分 AG 上に点 R を $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{AG}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{AG}$ で表せ。

(3) 直線 QR と平面 $EFGH$ の交点を S とする。 $\overrightarrow{AS}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ で表せ。

第 3 問

実数の定数 a に対して，3 次関数 $f(x) = 9x^3 - 9x + a$ を考える。

- (1) $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点が 2 つ以上となる a の範囲を求めよ。
- (2) (1) の範囲における a の最大値をとるとき，方程式 $f(x) = 0$ の最小の解と， $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 4 問

(1) 実数列 $\{a_n\}$ に関する条件

(P) 「 $n \geq N$ ならば $a_n \leq 4$ 」が成り立つ自然数 N が存在する

を考える。次の条件から答えよ。

(a) $n > N$ ならば $a_n \leq 4$ となる自然数 N が存在する。(b) $n < N$ ならば $a_n \leq 4$ となる自然数 N が存在する。(c) $n \geq N$ ならば $a_n > 4$ となる自然数 N が存在する。(d) $a_n > 4$ となる自然数 n が無限個存在する。(e) $a_n \leq 4$ となる自然数 n が無限個存在する。(f) $a_n > 4$ となる自然数 n は存在しても有限個である。(g) $a_n \leq 4$ となる自然数 n は存在しても有限個である。

(i) P の必要十分条件, (ii) 必要条件だが十分条件ではないもの, (iii) P の否定をそれぞれ選べ。

(2) $t > 0$ とし、直線 $\ell: y = -x + t$ と領域

$$B: x^2 + (y - 2)^2 \leq \frac{t^2}{4}$$

を考える。 B と ℓ が 2 点以上で交わるとき、交わりとして得られる線分の長さが最大となる t と、その最大値を求めよ。

(3) 正の数 x, y が $x \geq 1, y \geq 1, x^5 y^4 \geq 100, x^2 y^9 \geq 100$ を満たすとき、 $z = xy$ を最小にする組を (a, b) とする。 $\log_{10} a, \log_{10} b$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)