

上智大学 2022 年度 TEAP2 数学 (PM)

解答

全 4 問

【第 1 問】

- (1) $y = \cos x$ の 1 次近似式を用いて $\cos 61^\circ$ を求め、小数第 3 位を四捨五入せよ。ただし $\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$ とする。
- (2) 12 人のクラスを A, B, C の 3 グループに分ける。人数は順に 3 人, 4 人, 5 人であり、得点は 0 以上 10 以下の整数である。
- (i) A の得点の分散は 6 で、2 人の得点は 2, 5 である。残る 1 人の得点を求めよ。
- (ii) B の平均は 2, 分散は 3, C の平均は 5, 分散は 6 である。クラス全体の平均と分散を求めよ。
- (3) 正の実数 a に対して $X = \{x \mid 0 < x < a\}$, $Y = \{y \mid 3 < y < 5\}$ とする。次の命題が成り立つための必要十分条件を選べ。
- (i) すべての $x \in X$ とすべての $y \in Y$ に対して $x < y$ 。
- (ii) $\exists y \in Y, \forall x \in X, x < y$ 。
- (iii) $\forall x \in X, \exists y \in Y, x < y$ 。

【方針】

(1) は $x = \pi/3$ のまわりで線形化する。(2) は「平方の平均 - 平均の平方」で各群の平方和を復元して合成する。(3) は開区間の上端に注意して量化記号を順に読む。

【解答】

- (1) $h = \pi/180$ とすると $\cos(\pi/3 + h) \simeq 1/2 - \sqrt{3}h/2 = 0.484\dots$ だから、求める値は 0.48 である。
- (2) (i) 残る得点を n とすると $2(n^2 - 7n + 19)/9 = 6$ 。範囲 $0 \leq n \leq 10$ より $n = 8$ である。
- (ii) 全体の平均は $\{(8+2+5) + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5\}/12 = 4$ である。B, C の平方和はそれぞれ $4(3+2^2) = 28$, $5(6+5^2) = 155$ 。よって全体の分散は $(8^2 + 2^2 + 5^2 + 28 + 155)/12 - 4^2 = 7$ である。
- (3) (i) は $a \leq 3$, (ii) は $a < 5$, (iii) は $a \leq 5$ が必要十分条件である。

【第 2 問】

一辺の長さが 1 の立方体 $OADB-CFGE$ を考え、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。実数 s, t に対して

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + \vec{b} + s\vec{c}, \quad \overrightarrow{OQ} = \vec{a} + t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

を満たす点 P, Q をとる。

- (1) 点 P, Q がそれぞれの直線を、立方体の頂点 2 点で答えよ。
- (2) その 2 直線の位置関係を答えよ。
- (3) 線分 PQ の長さを最小にする s, t と、そのときの PQ^2 を求めよ。
- (4) $0 \leq s, t \leq 1$ のとき、線分 PQ の中点が動く領域の形と面積を求めよ。
- (5) $0 \leq s, t \leq 1$ のとき、線分 PQ が通過する領域の体積を求めよ。

【方針】

点の表示を対角線の始点と方向ベクトルに直す。立方体の 3 辺を正規直交基底として PQ^2 を平方完成する。中点の 2 方向は直交するので長方形の面積を積で求め、線分の掃引領域は四面体として体積を出す。

【解答】

- (1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AE}$ だから P は直線 AE 上にある。また $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + (1-t)\overrightarrow{DF}$ だから Q は直線 DF 上にある。
- (2) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ であり、2 直線は交わらない。よってねじれの位置にあって垂直である。
- (3) 3 辺が互いに直交し長さ 1 であることから

$$PQ^2 = 3s^2 + 2t^2 - 2s - 2t + 1 = 3\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}.$$

したがって $s = 1/3$, $t = 1/2$ のとき最小となり, $PQ^2 = 1/6$ である。

(4) 中点 M は, 互いに垂直な方向 $\overrightarrow{AE}/2, \overrightarrow{FD}/2$ に動く。辺長はそれぞれ $\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2$ だから, 領域は正方形でない長方形, 面積は $\sqrt{6}/4$ である。

(5) 線分の通過領域は四面体 $ADEF$ である。底面 $\triangle ADF$ の面積を $1/2$, 高さを 1 とみれば, 体積は $1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/6$ である。

【第 3 問】

1 から 4 までは 1 つずつ記した正四面体のさいころ T を用いて, A, B がゲームをする。各自が決められた回数まで T を振り, 最後の目を得点とし, 高得点を勝ちとする。同点では B が勝つ。振り直すかどうかは各自が自分の勝率を最大にするよう選ぶ。 A が勝つ確率を $p = (2k+1)/2^n$ と表したときの k, n を, 次の場合に求めよ。

- (1) A, B がそれぞれ 1 回ずつ振る。
- (2) A が先に 1 回振り, その得点を知った B が 2 回まで振れる。
- (3) B の得点を知らずに A が 2 回まで振れ, 次に B が 1 回振る。
- (4) B の得点を知らずに A が 2 回まで振れ, 次に A の得点を知った B が 2 回まで振れる。
- (5) B の得点を知らずに A が 3 回まで振れ, 次に A の得点を知った B が 2 回まで振れる。

【方針】

最後の比較から逆向きに考える。 B は同点でも勝つため, A の得点を知る B は再試行後の勝率と現状維持を比較する。 A も各目ごとに振り直した場合の期待勝率と比較して最適な目だけを保持する。

【解答】

- (1) 16 通りのうち $A > B$ は 6 通りなので $p = 3/8 = (2 \cdot 1 + 1)/2^3$ 。よって $(k, n) = (1, 3)$ 。
- (2) A の目を a とすると, B が 2 回とも a 未満となるときだけ A が勝つ。したがって $p = \{0 + (1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2\}/4 = 7/32$ で, $(k, n) = (3, 5)$ 。
- (3) A は最初の目が 1, 2 なら振り直し, 3, 4 なら保持する。よって $p = \{3/8 + 3/8 + 1/2 + 3/4\}/4 = 1/2$ で, $(k, n) = (0, 1)$ 。
- (4) A は最初の目が 1, 2 なら振り直す。各初目に対する勝率は $7/32, 7/32, 1/4, 9/16$ なので $p = 5/16$ 。よって $(k, n) = (2, 4)$ 。
- (5) A は最初の目が 1, 2, 3 なら振り直す。各初目に対する勝率は $5/16, 5/16, 5/16, 9/16$ なので $p = 3/8$ 。よって $(k, n) = (1, 3)$ 。

【第 4 問】

原点を極, x 軸の正の部分を開始線とする極座標で, 点 P の極座標が時刻 $t \geq 0$ に対して

$$r = 1 + t, \quad \theta = \log(1 + t)$$

で与えられる。 $t = 0$ に出発して初めて y 軸上に到達するまでの軌跡を C とする。

- (1) 初めて y 軸上に到達する t を求めよ。(2) C 上の点の x 座標の最大値を求めよ。(3) C の長さを求めよ。(4) C を図示せよ。(5) C と x 軸, y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

【方針】

$x = (1+t) \cos \log(1+t)$, $y = (1+t) \sin \log(1+t)$ と媒介表示する。終点は偏角 $\pi/2$, 最大値は $x'(t) = 0$ から求める。長さは $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, 面積は

$$\int x \, dy$$

を用いる。

【解答】

- (1) $\log(1+t) = \pi/2$ より $t = e^{\pi/2} - 1$ である。
- (2) $x'(t) = \cos \log(1+t) - \sin \log(1+t)$ なので, 最大点では $\log(1+t) = \pi/4$ 。最大値は $e^{\pi/4}/\sqrt{2}$ である。
- (3) $x'^2 + y'^2 = 2$ だから, 曲線の長さは

$$\int_0^{e^{\pi/2}-1} \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1).$$

(4) C は $(1, 0)$ から出発し, 第 1 象限で外側へ広がりながら反時計回りに進み, $(0, e^{\pi/2})$ に至る。 x は $(e^{\pi/4}/\sqrt{2}, e^{\pi/4}/\sqrt{2})$ で最大となる。

(5) $\theta = \log(1+t)$ とおくと $1+t = e^\theta$ である。求める面積は

$$\int_C x \, dy = \int_0^{\pi/2} e^{2\theta} \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \, d\theta = \frac{1}{4} (e^\pi - 1).$$