

上智大学 2023 年度 理工学部数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

次の 6 つの複素数が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードがある。

$$\frac{1}{2}, 1, 2, \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

これらから無作為に 3 枚を選び、カードに書かれた 3 つの複素数を掛けた値に対応する複素数平面上の点を P とする。

(1) 点 P が虚軸上にある確率を求めよ。(2) 点 P の原点からの距離が 1 である確率を求めよ。

【方針】

3 枚選ぶ全事象は 6 枚からの組合せで数える。各カードの積の偏角は、実数カードは偏角 0, 3 つの複素数カードはそれぞれ $\pi/6, \pi/3, \pi/2$ を与える。また原点からの距離は各カードの絶対値の積で決まる。(1) 虚軸上にある条件は、積の偏角が $\pi/2$ になることを調べればよい。(2) 距離が 1 になる条件は、絶対値の積が 1 になることを調べればよい。

【解答】

(1) 全事象は 6 枚から 3 枚選ぶので、 ${}_6C_3 = 20$ 通りである。

カードの偏角に注目する。実数 $\frac{1}{2}, 1, 2$ の偏角はすべて 0 であり、 $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ の偏角はそれぞれ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ である。

3 枚の積が虚軸上にあるためには、積の偏角が $\frac{\pi}{2}$ になればよい。よって、選んだ 3 枚のうち複素数カードの偏角の和が $\frac{\pi}{2}$ であればよい。

可能な組は次の 2 種類である。- $\frac{\pi}{2}$ をもつカード 1 枚と実数カード 2 枚を選ぶ。実数カードは 3 枚あるから、通り数は ${}_3C_2 = 3$ 通り。- $\frac{\pi}{6}$ と $\frac{\pi}{3}$ をもつ 2 枚と実数カード 1 枚を選ぶ。実数カードは 3 枚あるから、通り数は 3 通り。

したがって条件を満たすのは合計 $3 + 3 = 6$ 通りである。よって求める確率は $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ である。

(2) 原点からの距離は絶対値の積である。各カードの絶対値は $\frac{1}{2}, 1, 2, 1, 1, 1$ である。距離が 1 となるには、積の絶対値が 1 でなければならない。

$\frac{1}{2}$ と 2 を同時に選ぶと、この 2 枚の積の絶対値は 1 になる。残る 1 枚は絶対値 1 のカード、すなわち $1, \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ の 4 枚から任意に選べる。したがって有利な組は 4 通りである。

さらに、絶対値 1 の 4 枚から 3 枚を選ぶ場合も、積の絶対値は 1 である。よってこの場合の有利な組は ${}_4C_3 = 4$ 通りである。

したがって有利事象は合計 $4 + 4 = 8$ 通りである。よって求める確率は $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ である。

【第 2 問】

$\{x \mid x > 0\}$ を定義域とする関数 $f(x)$ の集合 A に対して以下の 3 つの条件を考える。

(P) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が共に A の要素ならば、関数 $f(x) + g(x)$ も A の要素である。

(Q) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が共に A の要素ならば、関数 $f(x)g(x)$ も A の要素である。

(R) α が 0 でない定数で関数 $f(x)$ が A の要素ならば、関数 $\alpha f(x)$ も A の要素である。

A を次の (i)～(iv) の集合とすると、条件 (P), (Q), (R) のうち成り立つものをすべて解答欄に記せ。ただし、成り立つものが一つもないときには、解答欄の z を記せ。

(i) $f(1) = 0$ を満たす関数 $f(x)$ 全体の集合

(ii) $f(a) = 0$ となる正の実数 a が存在する関数 $f(x)$ 全体の集合

(iii) 全ての正の実数 x に対して $f(x) > 0$ が成り立つ関数 $f(x)$ 全体の集合

(iv) 定義域 $\{x \mid x > 0\}$ のどこかで連続でない関数 $f(x)$ 全体の集合

【方針】

各集合が加法・乗法・定数倍で閉じるかを定義に従って判定する。成り立たないものは具体的な反例の一つを示す。(i) は一点で 0 になる条件なので、その点での値が演算後どうなるかを見る。(ii) は零点がある条件なので、零点を別々に持つ関数の和で零点が消える例を作る。(iii) は正値性なので、加法・乗法は保たれるが、負の定数倍で壊れる。(iv) は不連続性の集合なので、和や積が連続になってしまう例を挙げ、定数倍は不連続性を保つことを確かめる。

【解答】

(i) A は $f(1) = 0$ を満たす関数全体である。

(P) について、 $f(1) = 0, g(1) = 0$ なら $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ より、 $f+g$ も A の要素である。

(Q) について、 $(fg)(1) = f(1)g(1) = 0 \cdot 0 = 0$ より、 fg も A の要素である。

(R) について、 $\alpha \neq 0$ とすると $(\alpha f)(1) = \alpha f(1) = \alpha \cdot 0 = 0$ より、 αf も A の要素である。

したがって (i) では P, Q, R が成り立つ。

(ii) A は「ある正の実数 a で $f(a) = 0$ となる」関数全体である。

(P) は成り立たない。たとえば $f(x) = x - 1, g(x) = 2 - x$ とすると、それぞれ $x = 1, x = 2$ で 0 となるので、ともに A の要素である。しかし $(f+g)(x) = 1$ となり、正の実数の範囲で 0 にならないから A の要素でない。

(Q) は成り立つ。 $f(a) = 0$ なら $(fg)(a) = f(a)g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$ であり、 fg も少なくとも $x = a$ で 0 となる。

(R) も成り立つ。 $f(a) = 0$ なら $(\alpha f)(a) = \alpha f(a) = \alpha \cdot 0 = 0$ より、 αf も A の要素である。

したがって (ii) では Q, R が成り立つ。

(iii) A は全ての正の実数 x に対して $f(x) > 0$ を満たす関数全体である。

(P) について、 $f(x) > 0, g(x) > 0$ なら、任意の正の実数 x で $(f+g)(x) = f(x) + g(x) > 0$ だから、 $f+g \in A$ である。

(Q) についても、 $(fg)(x) = f(x)g(x) > 0$ より、 $fg \in A$ である。

(R) については、 $\alpha < 0$ のとき $(\alpha f)(x) < 0$ となり A に入らない。したがって、0 でない定数倍全体では閉じていない。

よって (iii) では P, Q が成り立つ。

(iv) A は、定義域 $\{x \mid x > 0\}$ のどこかで連続でない関数全体である。

(R) は成り立つ。 f がある点 $c > 0$ で不連続なら、 $\alpha \neq 0$ に対し αf も同じ点 c で不連続である。実際、 αf が連続なら $f = (1/\alpha)(\alpha f)$ も連続になってしまう矛盾する。

(P) は成り立たない。たとえば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

とすると、どちらもどこでも不連続である。しかし $f+g \equiv 1$ は連続なので A に入らない。

(Q) も成り立たない。上の f, g では $fg \equiv 0$ となり、これも連続であるから A に入らない。

したがって (iv) では R のみが成り立つ。

【第 3 問】

一辺の長さが 2 である正四面体 OABC において、辺 OA の中点を M、辺 BC の中点を N とする。(1) 線分 MN の長さは何か。(2) $0 < s < 1$ とし、線分 MN を $s:(1-s)$ に内分する点を P とする。P を通り MN に垂直な平面で正四面体 OABC を切った断面は何か、またその面積を求めよ。

【方針】

正四面体を座標で置き、M、N の位置を求める。(1) は距離公式で出る。(2) は MN に垂直な平面の方程式を考え、四面体の各辺との交点を調べて断面の形を特定する。面積は断面の四角形の辺の長さから求める。

【解答】

正四面体の頂点を

$$O = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad B = (1, \sqrt{3}, 0), \quad C = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

とおくと、すべての辺の長さは 2 である。

(1)

$$M = (1, 0, 0), \quad N = \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

であるから

$$MN^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

より $MN = \sqrt{2}$ である。

(2) 点 P は $P = (1-s)M + sN$ で与えられるので $P = \left(1, \frac{2s\sqrt{3}}{3}, \frac{s\sqrt{6}}{3}\right)$ である。したがって、MN に垂直な平面は $2\sqrt{3}y + \sqrt{6}z = 6s$ で表される。

この平面は辺 OB, OC, AB, AC とそれぞれ 1 点ずつで交わる。実際、

$$X = (s, s\sqrt{3}, 0) \in OB, \quad Y = \left(s, \frac{s\sqrt{3}}{3}, \frac{2s\sqrt{6}}{3}\right) \in OC,$$

$$Z = (2-s, s\sqrt{3}, 0) \in AB, \quad W = \left(2-s, \frac{s\sqrt{3}}{3}, \frac{2s\sqrt{6}}{3}\right) \in AC$$

となる。

四角形 XYZW は、 $XY \parallel ZW$, $XZ \parallel YW$ であり、しかも $XY \perp XZ$ だから長方形である。

辺の長さは $XZ = 2(1-s)$, $XY = 2s$ である。よって断面積は $2s \cdot 2(1-s) = 4s(1-s)$ である。

したがって、断面は長方形、その面積は $4s(1-s)$ である。